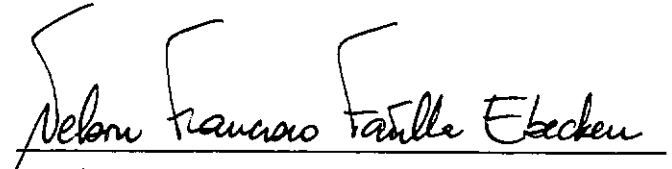


ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE LIMITE DE CASCAS AXISSIMÉTRICAS VIA PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

João de Deus Fonseca Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Nelson Francisco Favilla Ebecken
(Presidente)


Edson Castro Prates de Lima


Andres Ludovico Halbritter


José Cláudio Faria Telles

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 1983

FONSECA NETO, JOÃO DE DEUS

Elementos Finitos para Análise Limite de Cascas Axis
simétricas via Programação Não-Linear [Rio de Janeiro],
1983

VIII, 109 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia
Civil, 1983)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro.

1. Análise Limite I. COPPE/UFRJ II. Título(série)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, irmãs e irmãos pela união permanente.

Aos amigos Adilson Carvalho Benjamim e Nelson Francisco Favilla Ebecken cujo apoio e participação foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a análise limite rígido-plástica de cascas de revolução submetidas a carregamento rotacionalmente simétrico. Estas cascas, de forma qualquer, são discretizadas em uma série de elementos finitos tronco-cônicos. Utiliza-se a condição de escoamento de von Mises válida para cascas "sandwich". Após a discretização por elementos finitos, o problema da análise limite se reduz a uma simples aplicação de técnicas de programação não-linear, onde a técnica de minimização sequencial sem restrições (SUMT), o método do gradiente reduzido generalizado e o método da tolerância flexível são utilizados para a aproximação estaticamente admissível e cinematicamente admissível. Limites superiores e inferiores de cargas limites são obtidos para alguns tipos de cascas: cônicas, esféricas, elipsoidais, torisféricas, etc. Estes resultados são apresentados e comparados com os existentes na literatura e outros obtidos pela análise elasto-plástica incremental.

ABSTRACT

This work is concerned with rigid-plastic limit analysis of shells of revolution subject to rotationally symmetric loadings. These shells, of arbitrary shape, are discretized into a series of finite elements, each being a conical shell. The von Mises condition, valid for sandwich shells, is used. After assembling the finite elements, the limit analysis program is reduced to a simple application of the non-linear programming technique where the sequential unconstrained minimization technique (SUMT), the generalized reduced gradient method and the tolerance flexible method are utilized for statically admissible and kinematically admissible approaches. Therefore, upper bounds and lower bounds of the collapse loads are found for some problems: conical, spherical, ellipsoidal, torispherical shells etc. These numerical results are illustrated and compared with existing ones described in the literature and others provided from elastic-plastic analysis.

ÍNDICE

	<u>PAG.</u>
CAPÍTULO I . INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II . FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
II .1. Introdução	4
II .2. Relações Fundamentais	6
II .3. Teoremas da Análise Limite	9
II .4. Condição de Escoamento	11
II .5. Lei de Escoamento-Potencial Plá <u>s</u> tico	18
CAPÍTULO III. APROXIMAÇÃO ESTÁTICA	20
III.1. Introdução	20
III.2. Formulação dos Elementos Finitos de Equilíbrio	20
III.3. Eliminação Automática dos Parâ <u>m</u> tros Dependentes	25
III.4. Vetor de Forças Exteriores Unitá <u>r</u> ias	28
III.5. Elemento Finito de Equilíbrio Tronco-Cônico	32
CAPÍTULO IV . APROXIMAÇÃO CINEMÁTICA	36
IV .1. Introdução	36
IV .2. Formulação dos Elementos Finitos Compatíveis	36
IV .3. Elemento Finito Compatível Tron- co-Cônico	38

	<u>PAG.</u>
IV .4. Potência de Dissipação Interna	42
IV .5. Potência de Dissipação Externa	47
CAPÍTULO V . PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR	50
V .1. Introdução	50
V .2. Apresentação da Técnica de Minimi zação Sequencial sem Restrições - SUMT	51
V .3. Apresentação do Método do Gradien te Reduzido Generalizado - GRGA	55
V .4. Apresentação do Método da Tolerân cia Flexível - FLEX	60
V .5. Utilização da Técnica de Minimiza ção Sequencial sem Restrições (SUMT)	61
V .6. Utilização do Método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRGA)	66
V .7. Utilização do Método da Tolerância Flexível (FLEX)	67
CAPÍTULO VI . RESULTADOS E COMPARAÇÕES	70
VI .1. Introdução	70
VI .2. Casca Cônica	72
VI .3. Placa Circular	80
VI .4. Calota Esférica e Esfera	84
VI .5. Casca Elíptica	88
VI .6. Casca Torisférica	91
VI .7. Vaso de Pressão (Cilindro/Esfera) ...	94

	<u>PAG.</u>
CAPÍTULO VII. CONCLUSÃO	96
BIBLIOGRAFIA	98
APÊNDICE A	105

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise elasto-plástica pelo método dos elementos finitos e processos incrementais-iterativos é na atualidade uma ferramenta que encontra um vasto campo de aplicação na engenharia. Estas soluções precisas podem demandar em alguns casos esforço computacional excessivo. Em determinadas situações práticas o interesse do engenheiro pode estar restrito apenas a obtenção das características da estrutura próximo ao colapso o que permite o acesso as condições reais de segurança. Esta consideração é justificada pela demanda de projetos que implicam em investigações de novos conceitos estruturais e novas técnicas de fabricação.

O objetivo deste trabalho é a análise limite rígido-plástica de cascas de revolução sujeitas a carregamento rotacional - mente simétrico.

Para o estudo destas cascas Biron e Hodge^{1,2} construíram os campos estaticamente ou cinematicamente admissíveis, dependendo de um sistema de parâmetros arbitrários e obtiveram alguns resultados^{3,4}. A formulação completa que se vale do método dos elementos finitos é apresentada por Hodge e Belytscho⁵ e Maier⁶. Trabalhos numéricos⁷ aplicaram com sucesso esses métodos à análise limite de placas tracionadas ou em flexão. Ngugen Dang Hung⁸ introduziu a noção "critério médio de plasticidade" transformando o problema de cálculo da resistência limite das estruturas pla-

nas em uma série de problemas elásticos equivalentes onde é possível obter diretamente sem uso de programação matemática e sobre o mesmo algoritmo, os limites superiores, inferiores e estacionários da carga de colapso.

Trabalhos recentes já desenvolvem aspectos próprios do método dos elementos finitos. Anderheggen⁹ formula elementos finitos para análise limite assumindo um material rígido-plástico, Biron¹⁰ comenta a dificuldade em tratar-se da interseção direta cilindro-cilindro sem introduzir alguma simplificação e utilizando-se de programação linear. Zavelani-Rossi¹¹, Peano^{11,12} e Binda¹¹ propõem um modelo de elementos finitos capaz de obter o limite inferior, através de funções de tensões, para vasos de pressão axissimétricos.

A descoberta da analogia entre a "engenharia de plasticidade" e a programação matemática¹³ tem levado a um rápido progresso na solução dos problemas práticos via programação não-linear. Desta forma está sendo desenvolvido a semelhança do programa STRUDL para análise elástica o STRUPL para a engenharia plástica¹⁴.

Neste trabalho utiliza-se o método dos elementos finitos empregando-se elementos tronco-cônicos de tal forma que fique preservada a estrutura computacional do método⁵⁴.

Os fundamentos teóricos são apresentados no capítulo II onde discutem-se os teoremas da análise limite²⁰ e a condição de escoamento de von Mises¹⁹ para "casca sandwich" aqui utilizada.

A aproximação estática apresentada no capítulo III parte de valores fixados dentro de uma parametrização que satisfaz

as equações de equilíbrio, das tensões circunferenciais e da carga de colapso considerada unitária. É exigido do campo de tensões ser plasticamente admissível apenas em cada nó.

Na aproximação cinemática apresentada no capítulo IV o campo de velocidade de deslocamentos, o qual deve ser compatível e contínuo utiliza expansões lineares e cúbicas.

Os métodos de programação não linear³³ são apresentados no capítulo V. Utiliza-se: a) para a aproximação estática a técnica de minimização sequencial sem restrições (SUMT), o método do gradiente reduzido generalizado versão Abadie (GRGA) e o método da tolerância flexível (FLEX); b) para a aproximação cinemática o GRGA e o FLEX.

Procura-se mostrar, no capítulo VI através dos resultados, a validade da análise limite para aproximações não rigorosas da geometria das cascas analisadas, o que é a conclusão do trabalho comentada no capítulo VII.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

II.1. INTRODUÇÃO

Os teoremas da análise limite são válidos para uma teoria aproximada se, e somente se, as relações de equilíbrio e velocidade de deformação são tais que o princípio dos trabalhos virtuais é aplicável. Uma teoria para a qual isto é verdade pode ser chamada de consistente⁴⁴.

Neste trabalho além de adotar a abordagem acima mencionada, algumas considerações adicionais devem ser introduzidas. Para evitar problemas matemáticos extremamente difíceis, idealiza-se a estrutura como de duas dimensões ao mesmo tempo que simplifica-se o material plástico utilizando-se uma condição de escoamento simples. É duvidável se a análise limite mais esmerada teoricamente poderia prever o comportamento verdadeiro dos materiais no estado plástico²². As teorias simplificadas podem ser inexatas mas levam a soluções de valor prático.

Admite-se o material perfeitamente plástico¹⁹, ou seja, capaz de suportar deformações plásticas ilimitadas sobre tensão de referência constante quando está submetido a um estado de tensões homogêneo com $\sigma = \sigma_0$.

O valor σ_0 é bem definido para cada material em um dado meio, e é a limitação do valor σ . Estados de tensão nos quais $\sigma > \sigma_0$ não são possíveis.

Desconsidera-se portanto qualquer efeito elástico. Utilizam-se apenas as deformações e velocidades de deformações puramente plásticas e os deslocamentos e velocidades de deslocamentos correspondentes.

Em um número considerável de problemas relacionados a análise estrutural, é mais conveniente trabalhar com tensões e deformações generalizadas, do que diretamente com tensões e deformações propriamente ditas²⁰. As tensões generalizadas são obtidas, é claro, começando-se pelas componentes físicas de tensões e deformações e integrando-as apropriadamente.

Durante um escoamento plástico incipiente de uma dada partícula, onde o estado de tensões é descrito por $(\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots)$ e o estado de velocidade de deformações por $(\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots)$, a potência das tensões por unidade de volume é:

$$d = \sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \dots \quad (x, y, z) \quad (II.1)$$

Para deformações puramente plásticas esta potência é dissipada em calor durante o escoamento plástico. Portanto é chamada de potência de dissipação e é essencialmente positiva¹⁹.

Definem-se as tensões generalizadas como as variáveis do tipo-tensão que aparecem na expressão da potência de dissipação¹⁸, sendo as variáveis de tensão componentes do tensor de tensões, resultantes de tensões ou de tensões adimensionais. Uma vez definidas as tensões generalizadas é necessário especificar as correspondentes deformações generalizadas.

Deve ser notado que somente essas quantidades de tensões as quais contribuem para o trabalho interno podem ser tomadas como tensões generalizadas.

Desta forma é sempre possível expressar a condição de escoamento em termos das variáveis de tensões da expressão da potência de dissipação, isto é, nos termos das tensões generalizadas. Fisicamente a possibilidade de fazer isto não é óbvia porque a condição de escoamento envolve essencialmente as tensões, e pode-se pensar que as reações não nulas, (porque elas produzem em geral tensões não nulas) contribuem na condição de escoamento¹⁸.

Para o caso particular de cascas rotacionalmente simétricas, foi demonstrado²⁴ que as definições de tensões generalizadas estão de acordo com a definição usual de tensões.

II.2. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Para uma casca tendo a forma de uma superfície de revolução e carregada simetricamente em relação a seus eixos, obtêm-se as equações de equilíbrio e as relações deformação-deslocamentos da condição de equilíbrio de um elemento isolado de casca^{15, 16, 17} por dois planos meridionais adjacentes e duas seções perpendiculares aos meridianos Figura(II.1). Pode-se concluir da condição de simetria que somente tensões normais atuarão nos lados do elemento pertencentes ao plano do meridiano.

Utiliza-se, por conveniência, quantidades adimensionais²⁴. Para esse fim chama-se de N_0 a força máxima normal a qual a casca pode resistir em tensão uniaxial e por M_0 o momento máximo de flexão uniaxial e define-se:

$$n_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{N_0} \quad , \quad n_{\phi} = \frac{N_{\phi}}{N_0}$$

$$m_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{M_0} \quad , \quad m_{\phi} = \frac{M_{\phi}}{M_0} \quad (II.2)$$

$$\dot{k} = (M_0/N_0)\dot{\chi} \quad , \quad \dot{k}_{\theta} = (M_0/N_0)\dot{\chi}_{\theta}$$

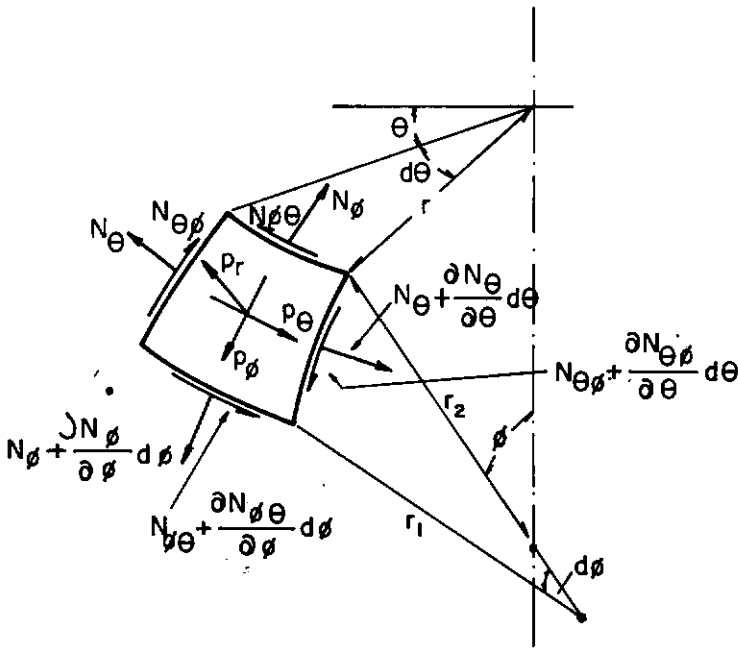


Fig. II.1 - Elemento de casca de revolução

Representa-se uma dimensão típica da casca por L e define-se:

ne-se:

$$r = \frac{R}{L} \quad , \quad r_1 = \frac{R_1}{L} \quad , \quad r_2 = \frac{R_2}{L}$$

$$\dot{u} = \frac{\dot{U}}{L} \quad , \quad \dot{w} = \frac{\dot{W}}{L} \quad , \quad h = \frac{M_0}{L \cdot N_0} = \frac{e}{4L}$$

$$\rho_n = \frac{P_n \cdot L}{2 \cdot N_0} \quad , \quad \rho_{\phi} = \frac{P_{\phi} \cdot L}{2 \cdot N_0} \quad , \quad q_{\phi} = \frac{Q_{\phi}}{N_0}$$

$$d_{ext} = \frac{D_{ext}}{2\pi N_0 L^2} \quad , \quad d_{int} = \frac{D_{int}}{2\pi N_0 L^2} \quad (II.3)$$

Em termos dessas quantidades adimensionais as equações de equilíbrio ficam:

$$\frac{\partial(rn_\phi)}{\partial\phi} - r_1 n_\theta \cos \phi - r q_\phi + r r_1 \rho_\phi = 0 \quad (\text{II.4})$$

$$\frac{\partial(rq_\phi)}{\partial\phi} + r_1 n_\theta \sin \phi + r n_\phi + 2 r r_1 \rho_n = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$h \left[\frac{\partial(rm_\phi)}{\partial\phi} - r_1 m_\theta \cos \phi \right] - r r_1 q_\phi = 0 \quad (\text{II.6})$$

com $r = r_2 \sin \phi$

e as relações velocidade de deformação-velocidade de deslocamentos são:

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial \phi} - \dot{w} \right) ; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{r_2} (\dot{v} \cotg \phi - \dot{w}) \quad (\text{II.7})$$

$$\dot{k}_\phi = - \frac{h}{r_1} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{r_1} \left(\dot{u} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi} \right) \right] ; \quad \dot{k}_\theta = - \frac{h \cotg \phi}{r_2 \cdot r_1} \left(\dot{u} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi} \right) \quad (\text{II.8})$$

O elemento a ser utilizado é tronco-cônico. Deve-se então, particularizar as equações para a casca^{15,16,17} cônica, Figura (II.2). Tem-se: $\phi = \alpha = \text{cte}$, $r_1 \rightarrow \infty$ e $r_1 \Rightarrow ds/d\phi$; após essas considerações, dividem-se as equações (II.4 a II.6) por r_1 e substitui-se r_1 por $ds/d\phi$ obtendo-se:

$$\frac{d(sn_\phi)}{ds} - n_\theta + s\rho_\phi = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{d(sq_\phi)}{ds} + n_\theta \tg \alpha + 2s\rho_n = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$h \frac{d(sm_\phi)}{ds} - hm_\theta - sq_\phi = 0 \quad (II.11)$$

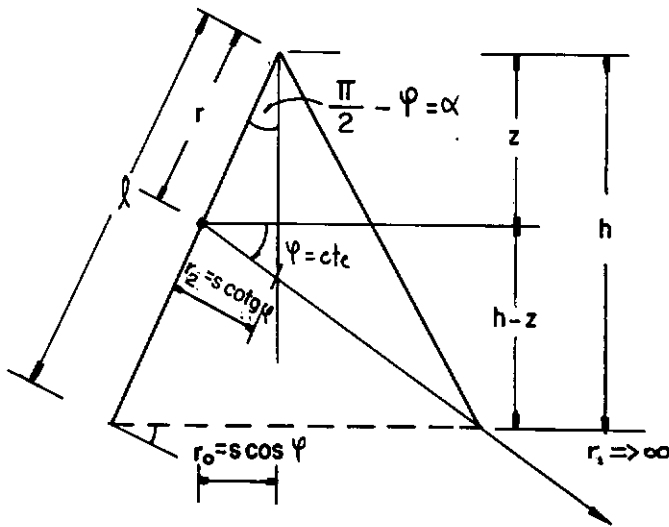


Fig. II.2 - Casca cônica

e as relações velocidade de deformação-velocidade de deslocamento particulares da casca cônica dados por:

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{d\dot{u}}{ds} \quad ; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{u} - \dot{w} \operatorname{tg} \alpha}{s} \quad (II.12)$$

$$\dot{k}_\phi = - \frac{hd^2 \dot{w}}{ds^2} \quad ; \quad \dot{k}_\theta = - \frac{hd\dot{w}}{sds} \quad (II.13)$$

II.3. TEOREMAS DA ANÁLISE LIMITE

A teoria da análise limite prediz a carga estática, chamada de limite ou carga de colapso, para a qual deformações plásticas sem restrições são incipientes numa estrutura composta de

um material perfeitamente plástico²⁹.

O objetivo é a determinação do fator de segurança (λ) de uma estrutura arbitrária sujeita a um conjunto de cargas denotadas pela função vetorial \underline{I} e a certas restrições geométricas. Por definição assume-se que a estrutura ocupa um volume V_0 limitado pela sua superfície S . (A modificação para tensões generalizadas as quais implicam outras dimensões é óbvia).

Os teoremas da análise limite²⁰ afirmam que o fator de segurança (λ) o qual multiplica o conjunto de cargas (\underline{I}) é o maior multiplicador estaticamente admissível e o menor multiplicador cinematicamente admissível.

Determina-se o maior multiplicador λ^+ através de uma aproximação estática baseada no Primeiro Teorema Fundamental da Análise Limite: a estrutura está sujeita ao conjunto de cargas $\rho \cdot \underline{I}$, sendo ρ incrementado lentamente a partir de zero. O fator de segurança λ^+ está definido como o menor número para o qual a estrutura pode experimentar um (infinitesimal) incremento na deformação sem incremento da carga.

Um campo vetorial de tensões $\underline{\sigma}$ é definido como estaticamente (e plasticamente) admissível se satisfizer três condições:

1. As tensões $\underline{\sigma}$ estão em equilíbrio interno
2. As tensões $\underline{\sigma}$ estão em equilíbrio com as cargas externas $\rho \cdot \underline{I}$
3. As tensões $\underline{\sigma}$ atendem a um critério de plasticidade.

Se existe algum campo vetorial de tensões $\underline{\sigma}$ estaticamente admissível em equilíbrio com as cargas $\lambda^+ \cdot \underline{I}$, então λ^+ é um

multiplicador estaticamente admissível.

Determina-se o menor multiplicador λ^+ através de uma aproximação cinemática baseada no Segundo Teorema da Análise Limite: um campo de velocidade \underline{v}^* é definido como cinematicamente (e plasticamente) admissível se satisfizer as seguintes condições:

1. \underline{v}^* obrigatoriamente satisfaz qualquer restrição de velocidade na estrutura.
2. A taxa externa total de trabalho D_{ext} efetuada pelas cargas atuantes \underline{T} nas velocidades assumidas \underline{v}^* é positiva.

A fim de definir um multiplicador cinematicamente admissível, deve-se primeiro encontrar o vetor da taxa de deformação generalizada \dot{q}^* associado a \underline{v}^* . Considera-se \dot{q}^* como completamente plástico e avalia-se sua correspondente função de dissipação $D_{ext}(q_1^* \dots q_n^*)$ em cada ponto. Denotando-se por $D_{int}(q_1^* \dots q_n^*)$ a dissipação interna total, integrada sobre toda a estrutura. O multiplicador cinemático admissível λ^+ é então definido como a relação entre a energia de dissipação interna e externa

$$\lambda^+ = \frac{D_{int}}{D_{ext}} \quad (II.14)$$

Demonstram-se os dois teoremas no Apêndice A deste trabalho.

II.4. CONDIÇÃO DE ESCOAMENTO

Quando o estado de tensão é uniaxial de compressão ou

tração, a condição de escoamento para a maioria dos metais é:¹⁹
 $\sigma = \pm \sigma_0$.

Num estado multiaxial de tensões, o escoamento ocorrerá quando uma certa condição física relacionada com o estado de tensões estiver satisfeita.

Para metais, e particularmente aço doce, tem sido observado que deformações plásticas basicamente consistem de deslocamento entre os cristais. Isto conduz ao pensamento de que a máxima tensão cortante determina o início de escoamento o qual sempre ocorre para um valor "fixo" de máxima tensão cortante. Esta é a condição de escoamento de Tresca.

Num estado multiaxial de tensões com tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 , a magnitude da máxima tensão cortante é a maior entre os três valores absolutos.

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \quad (II.15)$$

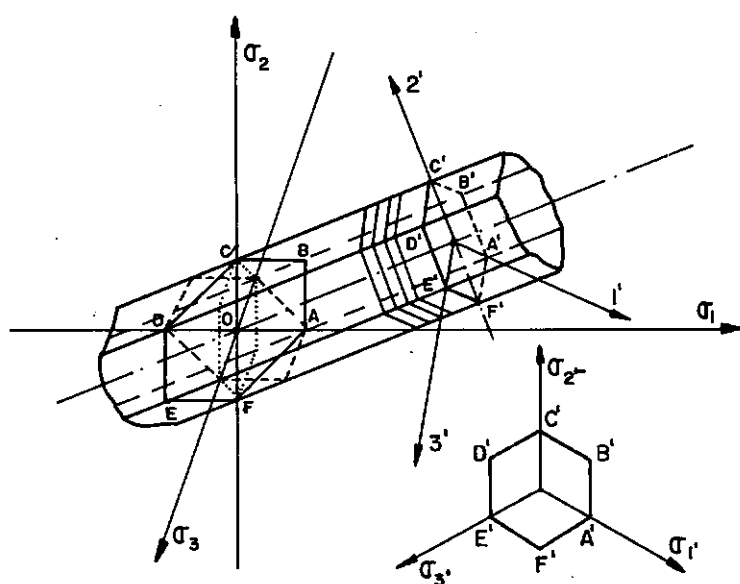


Fig.II.3_ Condição de escoamento de Tresca - prisma hexagonal

Esse prisma é mostrado na Figura (II.3). Seus eixos são igualmente inclinados em relação aos eixos coordenados.

Testes mais refinados¹⁹ tem entretanto mostrado que o cilindro circular circunscrito ao prisma hexagonal, Figura (II.4) é uma superfície de escoamento mais exata para a maioria dos metais. Essa superfície apresenta a condição de escoamento de Maxwell, Huber, Hencky e von Mises e será simplesmente chamada "condição de escoamento de von Mises". A equação dessa superfície em função das tensões principais é:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = \sigma_0^2 \quad (\text{II.16})$$

ou simplesmente $f(\underline{\sigma}) = \sigma_0$, usando-se componentes do tensor de tensões.

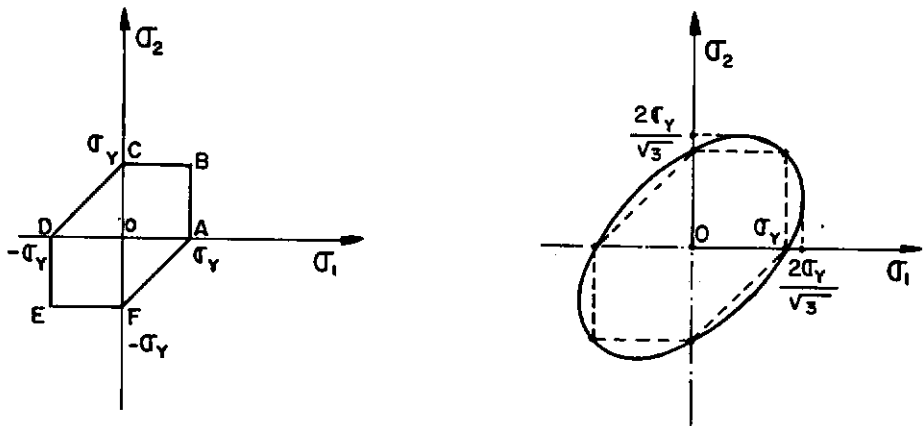


Fig.II.4 - Superfície de Tresca e Superfície de von Mises

A superfície da equação (II.16) é chamada "superfície de escoamento", porque estados de tensões no escoamento limite são representados por pontos de tensão nesta superfície.

Nota-se que para materiais perfeitamente plásticos considerados aqui, a tensão de referência depende somente do estado de tensões mas não do estado de deformações porque esses materiais não exibem trabalho de endurecimento.

A superfície de escoamento é portanto uma superfície fixada em um espaço hexadimensional¹⁹. Ela divide esse espaço em duas regiões: a região $f(\underline{\sigma}) \leq \sigma_0$ a qual consiste de pontos de tensões representando estados de tensões admissíveis e a região $f(\underline{\sigma}) > \sigma_0$ a qual corresponde a estados de tensões que não podem ser obtidos no material perfeitamente plástico considerado. Por conveniência de referência, pontos interiores da região admissível serão descritos como dentro da superfície de escoamento, enquanto pontos de tensão representando estados de tensões não alcançáveis serão descritos como sendo fora da superfície de escoamento. A origem das coordenadas, a qual representa o estado de tensões nulo, obrigatoriamente está dentro da superfície de escoamento porque o material não escoará na ausência de tensões.

A seleção da condição de escoamento está influenciada pelas seguintes considerações⁴:

- a) Uma superfície de escoamento de espessura uniforme é bastante complexa, mesmo utilizando-se o critério de Tresca²¹.
- b) As técnicas de minimização são baseadas em métodos de segunda ordem, os quais não permitem descontinuidade. O critério de Tresca sandwich, o qual pode ser facilmente utilizado para o limite inferior, torna-se bastante incomodo para o limite superior, devido as descontinuidades envolvidas. A condição de escoamento usada então é

aquela de von Mises para casca sandwich.

A casca sandwich ideal^{2,3} é composta de duas lâminas delgadas de espessura $e/2$ cada uma, separadas por um âmagão de espessura $H=e/2$. As lâminas são tão finas que a variação de tensões através delas pode ser ignorada. O âmagão não tem esforço de tensão mas pode suportar o esforço cortante necessário.

A condição de escoamento ou critério de plasticidade de von Mises para cascas é dada por:

$$\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_{\phi}\sigma_{\theta} = \sigma_0^2 \quad (\text{II.17})$$

A Figura II.5 mostra esquematicamente a casca sandwich. Para garantir-se a simulação de casca uniforme Figura (II.6) deve-se impor a condição de identificação entre a força normal e o momento de flexão aplicadas as mesmas.

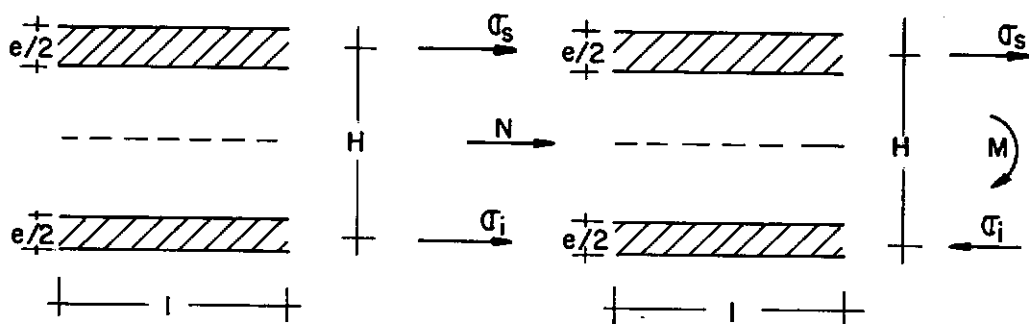


Fig. II.5 - Casca sandwich - esquema

$$N = \frac{e}{2} (\sigma_s + \sigma_i)$$

$$M = \frac{e}{2} \sigma_i \frac{H}{2} - \frac{e}{2} \sigma_s \frac{H}{2} = \frac{He}{4} (\sigma_i - \sigma_s) \quad (\text{II.18})$$

no limite tem-se $|\sigma_s| = |\sigma_i| = \sigma_0$ logo

$$N_s = e \cdot \sigma_0 \quad e \quad M_s = \sigma_0 \cdot e \frac{H}{2} \quad (\text{II.19})$$

Para casca uniforme tem-se

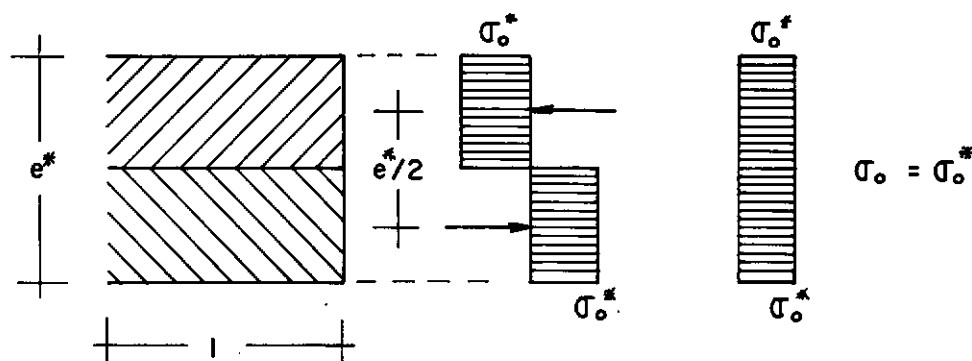


Fig. II.6 - Casca uniforme - esquema

$$N_u = \sigma_0 \cdot e^* \Rightarrow e = e^*$$

$$M_u = \sigma_0 \frac{e^*}{2} \frac{e^*}{2} = \frac{\sigma_0 e^{*2}}{4} \Rightarrow H = e/2 \quad (\text{II.20})$$

Obtem-se então a força normal máxima a qual a casca pode resistir em tensão uniaxial e o momento máximo de flexão uniaxial.

$$N_0 = \sigma_0 \cdot e$$

$$M_0 = \sigma_0 \frac{e^2}{4} \quad (\text{II.21})$$

Fazendo-se as devidas considerações:

$$N_\theta = \frac{e}{2}(\sigma_\theta^+ + \sigma_\theta^-) \quad N_\phi = \frac{e}{2}(\sigma_\phi^+ + \sigma_\phi^-)$$

$$M_\theta = \frac{He}{4}(\sigma_\theta^- - \sigma_\theta^+) \quad M_\phi = \frac{He}{4}(\sigma_\phi^- - \sigma_\phi^+) \quad (\text{II.22})$$

explicitando as tensões:

$$\sigma_{\theta}^{+} = \frac{1}{e} N_{\theta} - \frac{2}{eH} M_{\theta}$$

$$\sigma_{\theta}^{-} = \frac{1}{e} N_{\theta} + \frac{2}{eH} M_{\theta}$$

(II.23)

$$\sigma_{\phi}^{+} = \frac{1}{e} N_{\phi} - \frac{2}{eH} M_{\phi}$$

$$\sigma_{\phi}^{-} = \frac{1}{e} N_{\phi} + \frac{2}{eH} M_{\phi}$$

em função das variáveis adimensionais definidas nas equações (II.2), tem-se:

$$\sigma_{\theta}^{+} = \sigma_0 (n_{\theta} - m_{\theta})$$

$$\sigma_{\theta}^{-} = \sigma_0 (n_{\theta} + m_{\theta})$$

(II.24)

$$\sigma_{\phi}^{+} = \sigma_0 (n_{\phi} - m_{\phi})$$

$$\sigma_{\phi}^{-} = \sigma_0 (n_{\phi} + m_{\phi})$$

explicitando-se novamente o critério de von Mises sandwich para as variáveis adimensionais tem-se:

- folha inferior

$$(n_{\theta} + m_{\theta})^2 + (n_{\phi} + m_{\phi})^2 - (n_{\theta} + m_{\theta})(n_{\phi} + m_{\phi}) = 1 \quad (II.25)$$

- folha superior

$$(n_{\theta} - m_{\theta})^2 + (n_{\phi} - m_{\phi})^2 - (n_{\theta} - m_{\theta})(n_{\phi} - m_{\phi}) = 1 \quad (II.26)$$

A condição de escoamento não poderá ser violada em ne-

nhuma das folhas, porque devem ser respeitadas duas superfícies de escoamento não-lineares²³.

Definem-se também, de forma análoga, variáveis auxiliares⁵⁴ em relação as velocidades de deformações.

$$\begin{aligned}
 e_{\phi s} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\phi} - \dot{k}_{\phi}) \\
 e_{\phi i} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\phi} + \dot{k}_{\phi}) \\
 e_{\theta s} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\theta} - \dot{k}_{\theta}) \\
 e_{\theta i} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\theta} + \dot{k}_{\theta})
 \end{aligned}
 \tag{II.27}$$

II.5. LEI DE ESCOAMENTO - POTENCIAL PLÁSTICO

É necessário estabelecer-se um relacionamento entre as componentes de tensões e as correspondentes deformações plásticas, tal regra ou lei é geralmente conhecida como regra de escoamento ou lei de escoamento³⁷.

Em plasticidade, as relações tensões-deformações são não lineares e as deformações não podem ser unicamente determinadas pelo estado de tensões porque as deformações plásticas dependem também de toda a história do carregamento. Devido a essa dependência, é necessário usar teorias incrementais as quais proponham um relacionamento entre tensões e deformações incrementais.

O incremento de deformação plástica (dP), pode ser obtido do critério de plasticidade $f(\underline{\sigma})$ como segue:

$$d\underline{P} = d\lambda \left[\frac{\partial f}{\partial (\underline{\sigma})} \right] \quad (\text{II.28})$$

onde $d\lambda$ é uma constante não negativa de proporcionalidade a qual pode variar durante a história do carregamento.

Pode ser notada que a equação (II.28) implica em que o vetor de deformação plástica seja normal à superfície de escoamento da qual é requerido ser suave e convexa. Esse princípio é conhecido como "hipótese da normalidade".

O potencial plástico é uma função escalar da tensão. Seja a função $g(\underline{\sigma})$ da qual as componentes de deformação plástica podem ser obtidas por diferenciação parcial em relação às tensões como segue:

$$d\underline{P} = d\lambda \left[\frac{\partial g}{\partial (\underline{\sigma})} \right] \quad (\text{II.29})$$

Se $g(\underline{\sigma})$ é tal que é uma função simétrica das três tensões principais, então esta função é o critério de plasticidade assim como o potencial plástico.

Para este caso particular, ambas as equações (II.28) e (II.29) serão as mesmas.

CAPÍTULO III

APROXIMAÇÃO ESTATICA

III.1. INTRODUÇÃO

Pesquisa-se o limite inferior da carga de colapso através de uma aproximação estática fundamentada no primeiro teorema da análise limite (cap. II). A carga limite real será a maior das cargas correspondentes a um campo de tensões estaticamente e plasticamente admissível. O modelo de equilíbrio é baseado num campo de tensões paramétricas assegurando equilíbrio interno e transmissão continua de tensões entre elementos^{25,26,27}. Para geração automática desses campos de tensões em uma estrutura de forma qualquer adota-se o método dos elementos finitos modelo de equilíbrio. Para garantir que o campo de tensões seja plasticamente admissível aplica-se o critério de von Mises.

III.2. FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO

Associa-se a cada elemento k um campo paramétrico de tensões $\underline{\sigma}^k$ dependente de dois sistemas de parâmetros arbitrários \underline{b}^k e \underline{c}^k dando especial atenção aos modos de transmissão de tensões^{40,54}.

Tem-se

$$\underline{\sigma}^k = \underline{S}^k \underline{b}^k + \underline{T}^k \underline{c}^k = \underline{R}^k \underline{a}^k \quad (\text{III.1})$$

com $\underline{R}^k = \begin{vmatrix} \underline{S}^k & \underline{T}^k \end{vmatrix}$ e $\underline{a}^{kT} = \begin{vmatrix} \underline{b}^k & \underline{c}^k \end{vmatrix}^T$

B. Fraeijjs de Veubeke²⁷ demonstra que os parâmetros \underline{b}^k e \underline{c}^k equilibram respectivamente os campos os quais verificam as equações de equilíbrio homogêneas ($\underline{S}^k \underline{b}^k$) e as forças de superfície ($\underline{T}^k \underline{c}^k$), são arbitrários e independentes do princípio da energia complementar.

As cargas generalizadas que atuam nas fronteiras são definidas concordando com a seguinte regra: ao longo de cada fronteira de conexão a distribuição da tensão é unicamente determinada pelas cargas generalizadas pertencentes a essa fronteira e vice-versa. Dessa maneira a reciprocidade entre cargas generalizadas através de fronteira ocasiona completa continuidade de transmissão de tensões. O vetor de forças generalizadas \underline{g}^k é então expresso em função dos parâmetros \underline{b}^k e \underline{c}^k como segue:

Para as cargas generalizadas (\underline{g}_1^k) pertencentes a fronteira do elemento k

$$\underline{g}_1^k = \underline{C}_{11}^k \underline{b}^k + \underline{C}_{12}^k \underline{c}^k \quad (\text{III.2})$$

sendo então as cargas de superfície $\underline{T}^k \underline{c}^k$ representadas por um sistema de forças generalizadas suplementares (\underline{g}_2^k) dado por:

$$\underline{g}_2^k = \underline{C}_{22}^k \underline{c}^k \quad (\text{III.3})$$

Pode-se escrever então

$$\underline{g}^k = \underline{c}^k \underline{a}^k$$

(III.4)

com
$$\underline{c}^k = \begin{bmatrix} \underline{c}_{11}^k & \underline{c}_{12}^k \\ 0 & \underline{c}_{22}^k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |\underline{g}^k|^T = |\underline{g}_1^k \quad \underline{g}_2^k|^T$$

onde \underline{c}^k é a matriz de conexão de forças do elemento k .

O relacionamento de forças devido as conexões segue diretamente da consideração do trabalho virtual das cargas externas atuando ao nível de nós. Se $\dot{\underline{q}}$ denotar o vetor de velocidade de deslocamentos conjugado ao vetor de forças generalizadas (\underline{g}) da estrutura, a seguinte igualdade de trabalho virtual existe para um vetor $\dot{\underline{q}}$ de velocidade de deslocamentos arbitrários.

$$\underline{g}^T \dot{\underline{q}} = \sum_k \underline{g}^{kT} \dot{\underline{q}}^k = \sum_k \underline{g}^{kT} \underline{L}_k \dot{\underline{q}} \quad (\text{III.5})$$

onde
$$\underline{g}^T = \sum_k \underline{g}^{kT} \underline{L}_k \quad \text{ou} \quad \underline{g} = \sum_k \underline{L}_k^T \underline{g}^k$$

sendo \underline{L}^k uma matriz de localização.

Essas equações mostram como as cargas num elemento isolado somam-se para equilibrar as cargas externas nos nós²⁷. Devido a regra adotada nos modelos de equilíbrio para unir cada quantidade generalizada a somação para cada linha da equação (III.5) aplica-se a apenas dois valores. Se a carga externa correspondente acontecer ser zero, tem-se então uma confirmação da reciprocidade das ações entre dois elementos. Quando a carga externa está presente a continuidade de tensões é cumprida somente se a carga externa possui o mesmo tipo de distribuição.

De acordo com as equações (III.5) pode-se afirmar que a

potência de dissipação total será a soma das potências de dissipação de cada elemento:

$$\dot{P} = \sum_k \dot{\underline{q}}^k T \underline{g}^k = \dot{\underline{q}}^T \sum_k \underline{L}^k T \underline{g}^k = \dot{\underline{q}}^T \underline{g} \quad (\text{III.6})$$

onde

$$\underline{g} = \underline{C} \underline{a} = \sum_k \underline{L}^k T \underline{C}^k \underline{M}^k \underline{a} = \sum_k \underline{L}^k T \underline{g}^k$$

sendo

$$\underline{C} = \sum_k \underline{L}^k T \underline{C}^k \underline{M}^k \quad (\text{III.7})$$

Para atender a condição de ser plasticamente admissível aplica-se o critério de von Mises, conforme eqs. (II.25 e II.26) escrito sob forma matricial, para cada nó do elemento k.

$$\underline{\sigma}^T = |n_\theta \quad m_\theta \quad n_\phi \quad m_\phi| ; \quad (\text{III.8})$$

$$\underline{D}_1 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 1 & -2 \\ +1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{D}_2 = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{D}_1 \underline{\sigma} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{D}_2 \underline{\sigma} \leq 1 \quad (\text{III.9})$$

sendo $\underline{\sigma}^k = \underline{R}^k \underline{a}^k = \underline{R}^k \underline{M}^k \underline{a}$ e $\underline{\sigma}^{kT} = \underline{a}^T (\underline{R}^k \underline{M}^k)^T$

tem-se

$$\frac{1}{2} \underline{a}^T (\underline{R}^k \underline{M}^k)^T \underline{D}_1 (\underline{R}^k \underline{M}^k) \underline{a} \leq 1 \quad (\text{III.10})$$

e

$$\frac{1}{2} \underline{a}^T (\underline{R}^k \underline{M}^k)^T \underline{D}_2 (\underline{R}^k \underline{M}^k) \underline{a} \leq 1$$

Por questão de notação adota-se:

$$\underline{v}_1^k = (\underline{R}^k \underline{M}^k)^T \underline{D}_1 (\underline{R}^k \underline{M}^k) \quad \text{e} \quad \underline{v}_2^k = (\underline{R}^k \underline{M}^k)^T \underline{D}_2 (\underline{R}^k \underline{M}^k) \quad (\text{III.11})$$

obtendo-se então as seguintes inequações:

$$\frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{v}_1^k \underline{a} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{v}_2^k \underline{a} \leq 1 \quad (\text{III.12})$$

as quais são aplicadas apenas nos dois nós do elemento k .

De acordo com o primeiro teorema da análise limite e as equações (III.12) o problema se identifica com a programação matemática seguinte:

Maximizar $\lambda \{ \underline{a} \}$ sujeito as condições:

$$\underline{g} = \lambda \underline{\bar{g}} = \underline{C} \underline{a} \quad , \quad \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{v}_1^k \underline{a} \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{v}_2^k \underline{a} \leq 1 \quad (\text{III.13})$$

sendo $\underline{\bar{g}}$ o vetor de forças exteriores unitárias impostas. Tem-se assim que o máximo valor do multiplicador λ é a carga de colapso da casca.

III.3. ELIMINAÇÃO AUTOMÁTICA DOS PARÂMETROS DEPENDENTES

Uma vez montado o sistema $\underline{g} = \underline{C} \underline{a}$, para toda a estrutura, com as cargas generalizadas de fronteira (\underline{g}_1) apresentando a mesma distribuição das tensões, o vetor de forças generalizadas suplementares, o qual representa as cargas de superfície, não mais participa diretamente da montagem desse sistema. As forças generalizadas suplementares não são uma carga generalizada pertencente diretamente as fronteiras de cada elemento.

O sistema $\underline{g} = \underline{C} \underline{a}$ pode então ser ordenado da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline Nq \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Nd \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \lambda \bar{g}_\ell \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Nd \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline C_{\ell\ell} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline C_{\ell r} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline a_d \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Nd \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Na \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \quad (III.14)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \bar{g}_r \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Nr \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline C_{r\ell} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline C_{rr} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \bar{a} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Ni \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Na \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 Na = Nd + Ni \\
 Nq = Nd + Nr
 \end{array}$$

Os primeiros elementos do vetor de forças nodais (\bar{g}) correspondem as direções livres e os últimos as ações nos apoios; no vetor de parâmetros (\underline{a}) os primeiros parâmetros são os "dependentes" e os últimos os "independentes", entende-se por parâmetros independentes aqueles fixados a priori.

O vetor \underline{g} e o vetor \underline{a} sofrem uma reordenação simples isoladamente, gerando uma reordenação dupla na matriz de conexão \underline{C} .

A matriz $C_{\ell\ell}$ como apresentada sugere que o número de parâmetros dependentes (N_d) seja sempre igual ao número de direções livres, também N_d . Essa igualdade ocorre porque cada elemento acrescido ao sistema contribue com três direções livres e três pa

parâmetros dependentes.

Eliminando-se os movimentos de corpo rígido tem-se o rank de \underline{C} igual a N_d , ou seja $N_q - N_r$. Ainda usando propriedades de cálculo matricial³⁰, em relação ao rank, deve-se notar que o vetor de soluções (\underline{a}) terá um número de variáveis que podem assumir valores arbitrários (independentes) igual ao número total de parâmetros menos o rank de \underline{C} , ou seja $(N_d + N_i) - N_i = N_d$, os quais estarão unicamente relacionados a estas variáveis. Portanto a submatriz $\underline{C}_{\ell\ell}$ é quadrada e não singular permitindo assim explicitar os parâmetros dependentes em função dos independentes como segue:

$$\underline{a}_d = \underline{C}_{\ell\ell}^{-1}(\lambda \cdot \underline{\bar{g}}_\ell - \underline{C}_{\ell r} \underline{\bar{a}}) \quad (\text{III.15})$$

$$\underline{\bar{g}}_r = (\underline{C}_{rr} - \underline{C}_{r\ell} \cdot \underline{C}_{\ell\ell}^{-1} \underline{C}_{\ell r}) \underline{\bar{a}} + \underline{C}_{r\ell} \cdot \underline{C}_{\ell\ell}^{-1} \cdot \underline{\bar{g}}_\ell \cdot \lambda \quad (\text{III.16})$$

Com este procedimento o vetor \underline{a} fica:

$$\underline{a} = \begin{vmatrix} \underline{C}_{\ell\ell}^{-1}(\lambda \cdot \underline{\bar{g}}_\ell - \underline{C}_{\ell r} \underline{\bar{a}}) \\ \underline{\bar{a}} \end{vmatrix} \quad (\text{III.17})$$

fazendo-se

$$\underline{a}_0 = \begin{vmatrix} \underline{C}_{\ell\ell}^{-1} \cdot \underline{\bar{g}}_\ell \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{H} = \begin{vmatrix} -\underline{C}_{\ell\ell}^{-1} \cdot \underline{C}_{\ell r} \\ \underline{I} \end{vmatrix} \quad (\text{III.18})$$

tem-se:

$$\underline{a} = \lambda \cdot \underline{a}_0 + \underline{H} \underline{\bar{a}} \quad (\text{III.19})$$

substituindo-se nas equações (III.13) do critério de plasticidade obtem-se as restrições com o multiplicador λ já incluído e em função dos parâmetros independentes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{a} &= \frac{1}{2} \lambda^2 \underline{a}_0^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{a}_0 + \frac{1}{2} \lambda \bar{\underline{a}}^T \underline{H}^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{a}_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda \underline{a}_0^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{H} \bar{\underline{a}} + \frac{1}{2} \bar{\underline{a}}^T \underline{H}^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{H} \bar{\underline{a}} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

define-se por conveniência

$$\begin{aligned} \underline{Z}^k &= \underline{H}^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{a}_0 \quad ; \quad \underline{W}^k = \underline{H}^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{H} \\ \underline{Z1}^k &= \underline{a}_0^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{H} \quad ; \quad B^k = \underline{a}_0^T \underline{V}_{1,2}^k \underline{a}_0 \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

O problema fica então definido como:

Maximizar $\lambda(\bar{\underline{a}})$ sujeito a

$$\frac{1}{2} \lambda^2 B^k + \frac{1}{2} \lambda \bar{\underline{a}}^T \underline{Z}^k + \frac{1}{2} \lambda \underline{Z1}^k \bar{\underline{a}} + \frac{1}{2} \bar{\underline{a}}^T \underline{W}^k \bar{\underline{a}} \leq 1 \quad (\text{III.22})$$

A força generalizada suplementar, a qual representa as cargas de superfície é obtida para cada elemento k através da integração da equação (II.10) ao longo do elemento k .

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} (sq) ds + \int_{s_1}^{s_2} n_\theta \operatorname{tg} \alpha ds + \int_{s_1}^{s_2} 2s \rho_n ds = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} r_1(q_1 \cos \alpha - n_1 \sin \alpha) + r_2(q_2 \cos \alpha - n_2 \sin \alpha) &= \\ &= \rho_n(r_2^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

As tensões circunferenciais n_θ e m_θ , as quais foram fixadas durante a parametrização e tornadas assim variáveis independentes, são determinadas para cada elemento k da mesma forma que a equação (III.23) através das equações (II.9) e (II.11)

$$n_\theta(r_2-r_1) = r_2 n_2 + r_1 n_1 \quad (\text{III.24})$$

$$hm_\theta(r_2-r_1) = h(r_2 m_2 - r_1 m_1) - (r_2^2 q_2 - r_1^2 q_1) / 2 \cos \alpha \quad (\text{III.25})$$

III.4. VETOR DAS FORÇAS EXTERIORES UNITÁRIAS

É necessário transformar as cargas distribuídas ao longo do elemento em cargas equivalentes nodais⁵⁵ concordando com a distribuição das tensões na fronteira de cada elemento.

Através de uma expansão linear

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s' \quad (\text{III.26})$$

e de uma expansão cúbica

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s' + \alpha_5 s'^2 + \alpha_6 s'^3 \quad (\text{III.27})$$

com

$$\frac{dw}{ds} = \phi = \alpha_4 + 2\alpha_5 s' + 3\alpha_6 s'^2 \quad (\text{III.28})$$

para os deslocamentos ao longo do elemento, relacionam-se estes com os deslocamentos nodais do elemento através da matriz de interpolação A

$$\underline{U} = \underline{A} \underline{U}^k \quad \text{ou seja}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

tem-se conforme Figura(III.1), para o nó 1, $s'=0$, logo

$$u_1 = \alpha_1$$

$$w_1 = \alpha_3 \quad (\text{III.30})$$

$$\phi_1 = \alpha_4$$

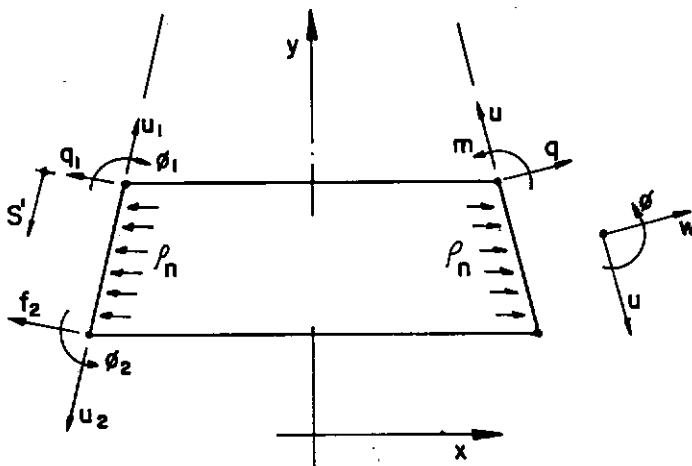


Fig. III.1 - Elemento finito tronco cônico - carga nodal equivalente

para o nó 2, $s'=l$, onde l é o comprimento do elemento em questão.

$$u_2 = u_1 + \alpha_2 \cdot \ell \implies \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{\ell}$$

$$w_2 = w_1 + \phi_1 \cdot \ell + \alpha_5 \ell^2 + \alpha_6 \ell^3 \quad (\text{III.31})$$

$$\phi_2 = \phi_1 + 2\alpha_5 \ell + 3\alpha_6 \ell^2$$

resolvendo-se o sistema

$$\alpha_5 = -\frac{3}{\ell^2} (u_1 - u_2) - \frac{3w_1}{\ell} - \frac{w_2}{\ell} \quad (\text{III.32})$$

$$\alpha_6 = \frac{2}{\ell^3} (u_1 - u_2) + \frac{w_1 + w_2}{\ell^2}$$

Pode-se então escrever

$$u = \left(1 - \frac{s^1}{\ell}\right) u_1 + \frac{s^1}{\ell} u_2$$

$$w = \left(1 - \frac{3s^{12}}{\ell^2} + \frac{2s^{13}}{\ell^3}\right) w_1 + \left(s^1 - \frac{2s^{12}}{\ell} + \frac{s^{13}}{\ell^2}\right) \phi_1 +$$

$$+ \left(\frac{3s^{12}}{\ell^2} - \frac{2s^{13}}{\ell^3}\right) w_2 + \left(-\frac{s^{12}}{\ell} + \frac{s^{13}}{\ell^2}\right) \phi_2$$

(III.33)

$$\phi = \left(-\frac{6s^1}{\ell^2} + \frac{6s^{12}}{\ell^3}\right) w_1 + \left(1 - \frac{4s^1}{\ell} + \frac{3s^{12}}{\ell^2}\right) \phi_1 +$$

$$+ \left(\frac{6s^1}{\ell^2} - \frac{6s^{12}}{\ell^3}\right) w_2 + \left(-\frac{2s^1}{\ell} + \frac{3s^{12}}{\ell^2}\right) \phi_2$$

A matriz de interpolação A resultante \bar{e} :

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s'}{\ell} & 0 & 0 & \frac{s'}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3s'^2}{\ell^2} + \frac{2s'^3}{\ell^3} & s - \frac{2s'^2}{\ell} + \frac{s'^3}{\ell^2} & 0 & \frac{3s'^2}{\ell^2} - \frac{2s'^3}{\ell^3} & -\frac{s'^2}{\ell} + \frac{s'^3}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6s'}{\ell^2} + \frac{6s'^2}{\ell^3} & 1 - \frac{4s'}{\ell} + \frac{3s'^2}{\ell^2} & 0 & \frac{6s'}{\ell^2} - \frac{6s'^2}{\ell^3} & -\frac{2s'}{\ell} + \frac{3s'^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

O vetor de forças equivalentes nodais \bar{e} é dado por

$$\underline{p}_\ell = \int_A \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{p} \, dA = \left(\int_0^1 \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{p} \cdot r \, ds \right) 2\pi\ell \quad \text{com} \quad ds = \frac{ds}{\ell} \quad (\text{III.35})$$

onde $\underline{p}^T = \{\rho_\phi \quad \rho_n \quad m\} = \{0 \quad 1 \quad 0\}$, neste caso $\rho_n = 1$ para impor-se um vetor de forças exteriores unitárias.

Tem-se então

$$\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - 3s'^2 + 2s'^3 \\ (s' - 2s'^2 + s'^3) \cdot \ell \\ 0 \\ 3s'^2 - 2s'^3 \\ (-s'^2 + s'^3) \cdot \ell \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

é necessário definir-se agora

$$r = r_i + s'\ell \cos \alpha \quad (\text{III.37})$$

onde r_i é o raio do nō inicial conforme Figura(III.1). Segue-se

$$\underline{p}_\ell = 2\pi\ell \left[\int_0^1 \underline{\underline{A}}^T \underline{p} \, r_i \, ds + \int_0^1 \underline{\underline{A}}^T \underline{p} \, s'\ell \cos \alpha \, ds \right] \quad (\text{III.38})$$

$$P_{\sim \ell} = 2\pi \ell \left[\begin{array}{c} 0 \\ r_i (s'^1 - s'^3 + \frac{s'^1}{2} + \ell \cos \alpha (\frac{s'^2}{2} - \frac{3}{4} s'^4 + \frac{2}{5} s'^5)) \\ \ell r_i (\frac{s'^2}{2} - \frac{2s'^3}{3} + \frac{s'^4}{4}) + \ell^2 \cos \alpha (\frac{s'^3}{3} - \frac{s'^4}{2} + \frac{s'^5}{5}) \\ 0 \\ r_i (s'^3 - \frac{s'^4}{2}) + \ell \cos \alpha (\frac{3s'^4}{4} - \frac{2s'^5}{5}) \\ \ell r_i (-\frac{s'^3}{3} + \frac{s'^4}{4}) + \ell^2 \cos \alpha (-\frac{s'^4}{4} + \frac{s'^5}{5}) \end{array} \right]_0^1$$

Aplicando-se os limites de integração

$$\frac{P_{\sim \ell}}{2\pi} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\ell r_i}{2} + \frac{3\ell^2 \cos \alpha}{20} \\ \frac{\ell^2 r_i}{12} + \frac{\ell^3 \cos \alpha}{30} \\ 0 \\ \frac{\ell r_i}{2} + \frac{7\ell^2 \cos \alpha}{20} \\ -\frac{\ell^2 r_i}{12} - \frac{\ell^3 \cos \alpha}{20} \end{array} \right] \quad (\text{III.39})$$

III.5. ELEMENTO FINITO DE EQUILÍBRIO TRONCO-CÔNICO

Para o elemento finito de equilíbrio tronco-cônico da Figura(III.2) o campo paramétrico de tensões $\underline{\sigma}^k = \underline{R}^k \underline{a}^k$ deve satisfazer a priori as equações de equilíbrio (II.9, II.10, II.11). Para tanto atribui-se às tensões circunferenciais n_θ e m_θ parâme

tros fixados e resolvendo-se as equações de equilíbrio em função destes, tem-se:

$$n_{\theta} = a_1 \quad m_{\theta} = a_2 \quad \rho = \rho_n$$

$$1) \frac{d}{dr} (rn) - a_1 = 0 \implies n = a_1 + \frac{a_3}{r}$$

$$2) \frac{d(rq)}{dr} + a_1 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2r\rho}{\cos \alpha} = 0$$

$$\implies q = -a_1 \operatorname{tg} \alpha - \frac{r\rho}{\cos \alpha} + \frac{a_4}{r} \quad (\text{III.40})$$

$$3) \frac{hd(rm)}{dr} - h a_2 - \frac{rq}{\cos \alpha} = 0$$

$$\implies m = a_2 - \frac{a_1 r \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} - \frac{\rho r^2}{3h \cos^2 \alpha} + \frac{a_4}{h \cos \alpha} + \frac{a_5}{r}$$

sob forma matricial, $\underline{\sigma}^k = \underline{R}^k \underline{a}^k$

$$\begin{bmatrix} n_{\theta} \\ m_{\theta} \\ n_{\phi} \\ m_{\phi} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} & 1 & 0 & \frac{1}{h \cos \alpha} & \frac{1}{r} & -\frac{r^2}{3h \cos^2 \alpha} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \rho \end{bmatrix}^k \quad (\text{III.41})$$

Como o vetor de forças exteriores generalizadas está representado pelo vetor de forças nodais equivalentes, o qual apresenta o mesmo tipo de distribuição das tensões (garantindo continuidade), obtem-se naturalmente a matriz de conexão definida em (III.4, III.7) das equações (III.40, III.41).

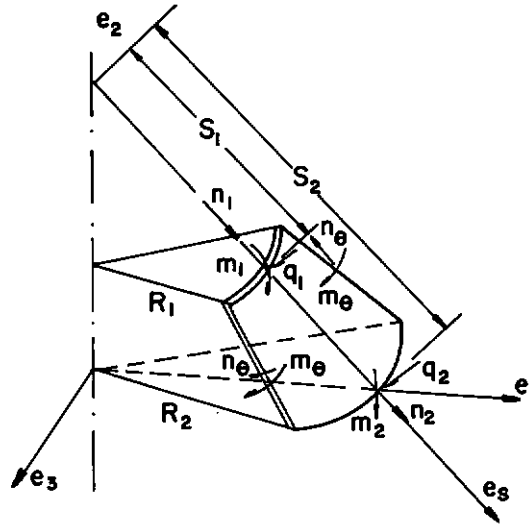


Fig.III.2_ Elemento finito de equilíbrio - tronco cônico

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ q_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ q_2 \\ m_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{tg} \alpha & 0 & 0 & \frac{1}{r_1} & 0 & -\frac{r_1}{\cos \alpha} \\ -\frac{r_1 \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} & 1 & 0 & \frac{1}{h \cos \alpha} & \frac{1}{r_1} & -\frac{r_1^2}{3h \cos^2 \alpha} \\ 1 & 0 & \frac{1}{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} \alpha & 0 & 0 & -\frac{1}{r_2} & 0 & \frac{r_2}{\cos \alpha} \\ \frac{r_2 \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos \alpha} & -1 & 0 & -\frac{1}{h \cos \alpha} & -\frac{1}{r_1} & \frac{r_2^2}{3h \cos^2 \alpha} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \rho \end{bmatrix}^k \quad (\text{III.42})$$

definindo-se as cargas de fronteira conforme Figura (III.2) e

$$\underline{g}_1^{kT} = [n_1 \quad q_1 \quad m_1 \quad n_2 \quad q_2 \quad m_2] \quad (\text{III.43})$$

escreve-se $\underline{g}_1^{kT} = \underline{C}^k \underline{a}^k$

Como a potência de dissipação é a soma da potência de

dissipação de cada elemento é necessário referir-se todas as matrizes ao mesmo sistema de eixos globais.

$$\underline{g}_g = \underline{T}^T \underline{g} \quad (\text{III.44})$$

onde

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{T}_1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

Para as cascas que não terminam em abertura, constroi-se um elemento especial que tem por finalidade representar o "fechamento cônico" da geometria⁵⁴.

No ponto de singularidade

$$n_\theta = -n_1 = a \quad ; \quad m_\theta = -m_1 = a_2$$

com

$$\underline{g}^T = |n_2 \quad q_2 \quad m_2| \quad ; \quad \underline{a}^T = |a_1 \quad a_2 \quad \rho_n| \quad (\text{III.46})$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{tg } \alpha & 0 & s_2 \\ \frac{s_2 \text{tg } \alpha}{2h} & -1 & \frac{s_2^2}{3h} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO IV

APROXIMAÇÃO CINEMÁTICA

IV.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo pesquisa-se o limite superior da carga de colapso através de uma aproximação cinemática fundamentada no segundo teorema da análise limite apresentado no Capítulo II deste trabalho.

A carga limite real é a menor das cargas do campo de velocidades de deformações cinematicamente admissível (e plasticamente admissível). O modelo de deslocamentos parte de hipóteses arbitrárias sobre o campo de velocidade de deslocamentos generalizados de tal maneira que a compatibilidade entre elementos seja assegurada. A geração automática desses campos para uma estrutura de forma qualquer baseia-se na técnica dos elementos finitos compatíveis^{2,8,55} (modelo deslocamento). Para garantir que o campo de velocidades de deslocamentos seja plasticamente admissível aplica-se o critério de plasticidade de von Mises.

IV.2. FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS COMPATÍVEIS

Admitem-se hipóteses arbitrárias sobre o campo de velocidade de deslocamentos de cada elemento k .

$$\dot{\underline{u}}^k = \underline{u}^k \cdot \dot{\underline{a}}^k \quad (\text{IV.1})$$

onde \underline{u}^k contém os termos polinomiais em variáveis locais da velocidade de deslocamento e \underline{a}^k é um vetor de parâmetros arbitrários.

De acordo com as condições de contorno do elemento determina-se um sistema de velocidades de deslocamentos generalizados ($\dot{\underline{q}}^k$) o qual deve garantir a continuidade, entre elementos, do campo de velocidade de deslocamentos⁵⁴.

$$\dot{\underline{q}}^k = \underline{B}^k \underline{a}^k \quad (\text{IV.2})$$

$$\underline{a}^k = \underline{B}^{-k} \cdot \dot{\underline{q}}^k \quad \text{onde} \quad \underline{B}^{-k} = |\underline{B}^k|^{-1} \quad (\text{IV.3})$$

Utilizando-se as relações velocidade de deslocamento - velocidade de deformação tem-se

$$\underline{e}^{ik} = \underline{A}^{ik} \underline{a}^k ; \quad \underline{e}^{sk} = \underline{A}^{sk} \underline{a}^k \quad (\text{IV.4})$$

sendo os vetores \underline{e} as variáveis auxiliares (II.27) apropriadas para aplicação do critério de von Mises "sandwich".

Tem-se então

$$\underline{e}^{ik} = \underline{A}^{ik} \underline{B}^{-k} \cdot \dot{\underline{q}}^k ; \quad \underline{e}^{sk} = \underline{A}^{sk} \underline{B}^{-k} \cdot \dot{\underline{q}}^k$$

em função das velocidades de deslocamentos generalizados ($\dot{\underline{q}}^k$), o que permite exprimir a dissipação interna e a dissipação externa em função dos termos polinomiais, da velocidade de deslocamento, dos parâmetros arbitrários e do vetor de velocidades de deslocamentos generalizados.

A montagem dos elementos finitos realiza-se como todo

modelo deslocamento em elasticidade, uma vez que a potência de dissipação total será obtida simplesmente pela soma da potência de dissipação de cada elemento k .

$$d_{int} = \sum_k d_{int}^k \quad e \quad d_{ext} = \sum_k d_{ext}^k \quad (IV.6)$$

De acordo com o segundo teorema da análise limite e as equações das potências de dissipação interna e externa, desenvolvidas a seguir, o problema passa a se identificar com um problema de programação matemática, modificado de (II.14) para obterem-se melhores resultados:

$$\text{minimizar } d_{int}\{\dot{q}\}$$

sobre a condição $d_{ext} > 1$, obtendo-se (IV.7)

$$\lambda = d_{int}/d_{ext}$$

IV.3. ELEMENTO FINITO COMPATÍVEL TRONCO-CÔNICO

O campo de velocidade de deslocamentos (\dot{q}), o qual deve ser compatível e contínuo utiliza expansões lineares e cúbicas⁵⁵ respectivamente para

$$\dot{u} = a_1 + a_2 s \quad (IV.8)$$

$$\dot{w} = a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3$$

sendo $\frac{d\dot{w}}{ds} = \dot{\phi} = a_4 + 2sa_5 + 3s^2a_6$

A coordenada s está definida na Figura (IV.1).

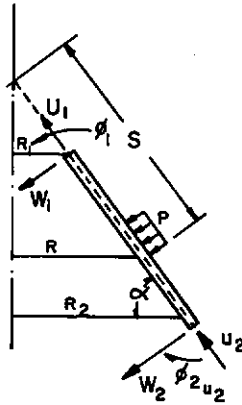


Fig. IV.1 - Elemento finito compatível-tronco cônico

O sistema de velocidade de deslocamentos generalizadas ($\dot{\underline{q}}$) está orientado conforme indicado na Figura (IV.1).

$$\dot{\underline{q}}^T = [\dot{u}_1 \quad \dot{w}_1 \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{w}_2 \quad \dot{\phi}_2] \quad (\text{IV.9})$$

De acordo com as equações (IV.8) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1 & s_1^2 & s_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s_1 & 3s_1^2 \\ 1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_2 & s_2^2 & s_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s_2 & 3s_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

A matriz inversa de \underline{B} , definida em (IV.3) é dada por:

$$\tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{r_2}{\Delta_1} & 0 & 0 & -\frac{r_1}{\Delta_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\cos \alpha}{\Delta_1} & 0 & 0 & \frac{\cos \alpha}{\Delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_2^2 \Delta_{21}}{\Delta_3} & -\frac{r_1 r_2^2 \Delta_1}{\Delta_3 \cos \alpha} & 0 & -\frac{r_1^2 \Delta_{12}}{\Delta_3} & -\frac{r_1^2 r_2 \Delta_1}{\Delta_3 \cos \alpha} \\ 0 & \frac{6r_1 r_2 \cos \alpha}{\Delta_3} & \frac{r_2 r_{12}}{\Delta_3} & 0 & -\frac{6r_1 r_2 \cos \alpha}{\Delta_3} & -\frac{r_1 r_{21}}{\Delta_3} \\ 0 & -\frac{3\cos^2 \alpha \Sigma}{\Delta_3} & \frac{r_{21} \cos \alpha}{\Delta_3} & 0 & \frac{3\cos^2 \alpha \Sigma}{\Delta_3} & -\frac{r_{12} \cos \alpha}{\Delta_3} \\ 0 & \frac{2\cos^3 \alpha}{\Delta_3} & \frac{\Delta_1 \cos^2 \alpha}{\Delta_3} & 0 & -\frac{2\cos^3 \alpha}{\Delta_3} & \frac{\cos^2 \alpha \Delta_1}{\Delta_3} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

com

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= r_2 - r_1 \quad ; \quad \Delta_{21} = r_2 - 3r_1 \quad ; \quad \Delta_{12} = r_1 - 3r_2 \\ \Sigma &= r_1 + r_2 \quad ; \quad \Delta_3 = \Delta_1^3 \quad ; \\ r_{12} &= -2r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \quad ; \quad r_{21} = -2r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Encontra-se a seguir a matriz \underline{A} definida na eq. (IV.4) a qual relaciona o campo de velocidade de deformações com os parâmetros arbitrários

$$\underline{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6] \quad (\text{IV.13})$$

Aplicando-se as equações (II.12), (II.13) e (IV.8)

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{d\dot{u}}{ds} = \frac{d(a_1 + a_2 s)}{ds} = a_2 \quad (\text{IV.14})$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\theta} &= \frac{\dot{u}-\dot{w} \operatorname{tg} \alpha}{s} = \frac{a_1}{s} + a_2 - \frac{a_3 \operatorname{tg} \alpha}{s} - a_4 \operatorname{tg} \alpha - \\ &- a_5 \operatorname{tg} \alpha s - a_6 \operatorname{tg} \alpha s^2\end{aligned}\quad (\text{IV.15})$$

$$\begin{aligned}\dot{K}_{\phi} &= -\frac{h d^2 \dot{w}}{ds^2} = -h \frac{d^2(a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3)}{ds^2} = \\ &= -h(2a_5 + 6s a_6) = -2h a_5 - 6h s a_6\end{aligned}\quad (\text{IV.16})$$

$$\begin{aligned}\dot{K}_{\theta} &= -\frac{h}{s} \frac{d \dot{w}}{ds} = -\frac{h}{s} \frac{d(a_3 + a_4 s + a_5 s^2 + a_6 s^3)}{ds} = \\ &= -\frac{h}{s} (a_4 + 2a_5 s + 3a_6 s^2) = -\frac{h a_4}{s} - 2h a_5 - \\ &- 3a_6 s h\end{aligned}\quad (\text{IV.17})$$

De acordo com as equações (II.27)

$$e_{\phi i} = \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\phi} + \dot{K}_{\phi}) = \frac{1}{2} (a_2 - 2h a_5 - 6h a_6 s) \quad (\text{IV.18})$$

$$e_{\phi s} = \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\phi} - \dot{K}_{\phi}) = \frac{1}{2} (a_2 + 2h a_5 + 6h a_6 s) \quad (\text{IV.19})$$

$$\begin{aligned}e_{\theta i} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\theta} + \dot{K}_{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{s} + a_2 - \frac{a_3 \operatorname{tg} \alpha}{s} - a_4 \operatorname{tg} \alpha - \right. \\ &\left. - a_5 \operatorname{tg} \alpha s - a_6 \operatorname{tg} \alpha s^2 - \frac{h a_4}{s} - 2h a_5 - 3a_6 s h \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.20})$$

$$\begin{aligned}e_{\theta s} &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{\theta} - \dot{K}_{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{s} + a_2 - \frac{a_3 \operatorname{tg} \alpha}{s} - a_4 \operatorname{tg} \alpha - \right. \\ &\left. - a_5 \operatorname{tg} \alpha s - a_6 \operatorname{tg} \alpha s^2 + \frac{h a_4}{s} + 2h a_5 + 3a_6 s h \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.21})$$

como $s=r/\cos \alpha$, as matrizes \underline{A}^{ik} e \underline{A}^{sk} ficam

$$\underline{A}^{jk} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2jh & + \frac{6hjr}{\cos \alpha} \\ & & & - \frac{\operatorname{tg} \alpha r}{\cos \alpha} + 2jh & \\ \frac{\cos \alpha}{r} & 1 & -\operatorname{tg} \alpha + \frac{j h \cos \alpha}{r} & & - \frac{\operatorname{tg} \alpha r^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{3jrh}{\cos \alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

para $j=1$ tem-se \underline{A}^{sk} e para $j=-1$ tem-se \underline{A}^{ik} .

Uma vez encontradas as matrizes \underline{A} e \underline{B} pode-se utilizar as equações (IV.5) as quais relacionam velocidades de deformações com velocidades de deslocamentos.

IV.4. POTÊNCIA DE DISSIPACÃO INTERNA

A potência de dissipação interna em função das variáveis reduzidas definidas nas equações (II.2 e II.3) é dada por:

$$d_{\text{int}} = \int (n_{\theta} \dot{\epsilon}_{\theta} + n_{\phi} \dot{\epsilon}_{\phi} + m_{\theta} \dot{k}_{\theta} + m_{\phi} \dot{k}_{\phi}) \frac{r dr}{\cos \alpha} \quad (\text{IV.23})$$

e em função das variáveis auxiliares definidas nas equações (II.24 e II.27)

$$d_{\text{int}} = \int (\sigma_{\phi i} e_{\phi i} + \sigma_{\phi s} e_{\phi s} + \sigma_{\theta i} e_{\theta i} + \sigma_{\theta s} e_{\theta s}) \frac{r dr}{\cos \alpha} \quad (\text{IV.24})$$

Recorre-se a lei de escoamento (potencial plástica) a fim de obterem-se as tensões em função das velocidades de deformações. Escreve-se a condição de escoamento (II.17) também con-

forme as equações (II.25 e II.26), tendo-se:

$$f_i = \sigma_{\phi i}^2 - \sigma_{\phi i} \sigma_{\theta i} + \sigma_{\theta i}^2 - 1 < 0$$

$$f_s = \sigma_{\phi s}^2 - \sigma_{\phi s} \sigma_{\theta s} + \sigma_{\theta s}^2 - 1 < 0$$
(IV.25)

aplicando-se a hipótese de normalidade

$$e_{\phi i} = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{\phi i}} = \lambda_i (2\sigma_{\phi i} - \sigma_{\theta i})$$

$$e_{\theta i} = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{\theta i}} = \lambda_i (2\sigma_{\theta i} - \sigma_{\phi i})$$

$$e_{\phi s} = \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{\phi s}} = \lambda_s (2\sigma_{\phi s} - \sigma_{\theta s})$$

$$e_{\theta s} = \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \sigma_{\theta s}} = \lambda_s (2\sigma_{\theta s} - \sigma_{\phi s})$$
(IV.26)

Resolvendo-se as equações (IV.26) obtém-se

$$\sigma_{\phi i} = (2e_{\phi i} + e_{\theta i}) / 3\lambda_i$$

$$\sigma_{\theta i} = (2e_{\theta i} + e_{\phi i}) / 3\lambda_i$$

$$\sigma_{\phi s} = (2e_{\phi s} + e_{\theta s}) / 3\lambda_s$$

$$\sigma_{\theta s} = (2e_{\theta s} + e_{\phi s}) / 3\lambda_s$$
(IV.27)

Substituindo-se as equações (IV.27) nas equações (IV.25) da condição de escoamento tem-se:

$$\left[\frac{(2e_{\phi i} + e_{\theta i})}{3\lambda_i} \right]^2 - \left(\frac{2e_{\phi i} + e_{\theta i}}{3\lambda_i} \right) \left(\frac{2e_{\theta i} + e_{\phi i}}{3\lambda_i} \right) + \left[\frac{(2e_{\theta i} + e_{\phi i})}{3\lambda_i} \right]^2 - 1 = 0$$

$$(2e_{\phi i} + e_{\theta i})^2 - (2e_{\phi i} + e_{\theta i})(2e_{\theta i} + e_{\phi i}) + (2e_{\theta i} + e_{\phi i})^2 - (3\lambda_i)^2 = 0$$

$$3e_{\phi i}^2 + 3e_{\theta i}^2 + 3e_{\phi i}e_{\theta i} - 9\lambda_i^2 = 0$$

$$\lambda_i^2 = (e_{\phi i}^2 + e_{\theta i}^2 + e_{\phi i}e_{\theta i})/3 \quad (\text{IV.28})$$

de forma semelhante

$$\lambda_s^2 = (e_{\phi s}^2 + e_{\theta s}^2 + e_{\phi s}e_{\theta s})/3 \quad (\text{IV.29})$$

Finalmente pode-se exprimir a dissipação interna unicamente em função do campo de velocidade de deformações.

$$d_{int} = \left[\frac{(2e_{\phi i} + e_{\theta i})}{3\lambda_i} e_{\phi i} + \frac{(2e_{\phi s} + e_{\theta s})}{3\lambda_s} e_{\phi s} + \frac{(2e_{\theta i} + e_{\phi i})}{3\lambda_i} e_{\theta i} + \frac{(2e_{\theta s} + e_{\phi s})}{3\lambda_s} e_{\theta s} \right] \frac{r dr}{\cos \alpha}$$

$$d_{int} = \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{\lambda_i} (2e_{\phi i}^2 + 2e_{\phi i}e_{\theta i} + 2e_{\theta i}^2) + \frac{1}{\lambda_s} (2e_{\phi s}^2 + 2e_{\theta s}e_{\phi s} + 2e_{\theta s}^2) \right] \frac{r dr}{\cos \alpha}$$

$$d_{int} = \frac{2}{3} \int \left[\frac{e_{\phi i}^2 + e_{\phi i} e_{\theta i} + e_{\theta i}^2}{(e_{\phi i}^2 + e_{\phi i} e_{\theta i} + e_{\theta i}^2)^{1/2}} \cdot \sqrt{3} + \frac{e_{\phi s}^2 + e_{\theta s} e_{\phi s} + e_{\theta s}^2}{(e_{\phi s}^2 + e_{\theta s} e_{\phi s} + e_{\theta s}^2)^{1/2}} \cdot \sqrt{3} \right] \frac{r dr}{\cos \alpha}$$

$$d_{int} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \left[(e_{\phi i}^2 + e_{\phi i} e_{\theta i} + e_{\theta i}^2)^{1/2} + (e_{\phi s}^2 + e_{\theta s} e_{\phi s} + e_{\theta s}^2)^{1/2} \right] \frac{r dr}{\cos \alpha}$$

(IV.30)

Define-se

$$\underline{e}^i{}^T = |e_{\phi i} \quad e_{\theta i}| \quad ; \quad \underline{e}^s{}^T = |e_{\phi s} \quad e_{\theta s}| \quad ;$$

(IV.31)

com $\underline{C} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

ficando d_{int} sob forma matricial^{3,0} escrito como segue

$$d_{int} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \left[\left(\frac{1}{2} \underline{e}^i{}^T \underline{C} \underline{e}^i \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \underline{e}^s{}^T \underline{C} \underline{e}^s \right)^{1/2} \right] \frac{r dr}{\cos \alpha} \quad (IV.32)$$

Para obter-se a potência de dissipação interna em função das velocidades de deslocamentos para um elemento k substituem-se os vetores $\underline{e}^i{}^T$ e $\underline{e}^s{}^T$ pelas equações (IV.5).

$$d_{int}^k = \left\{ \left[\frac{1}{2} (\underline{A}^i{}^k \underline{B}^{-k} \underline{q}^k)^T \underline{C} \cdot (\underline{A}^i{}^k \underline{B}^{-k} \underline{q}^k) \right]^{1/2} + \left[\frac{1}{2} (\underline{A}^s{}^k \underline{B}^{-k} \underline{q}^k)^T \underline{C} \cdot (\underline{A}^s{}^k \underline{B}^{-k} \underline{q}^k) \right]^{1/2} \right\} \frac{r dr}{\cos \alpha} \quad (IV.33)$$

Fazendo-se

$$\underline{\bar{K}}^{ik} = \underline{B}^{-kT} \underline{A}^{ikT} \underline{C} \underline{A}^{ik} \underline{B}^{-k} \quad (\text{IV.34})$$

$$\underline{\bar{K}}^{sk} = \underline{B}^{-kT} \underline{A}^{skT} \underline{C} \underline{A}^{sk} \underline{B}^{-k}$$

as quais são respectivamente as matrizes de tensões plásticas da folha inferior e da folha superior da casca. Chegando-se a expressão

$$d_{int}^k = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^kT \underline{\bar{K}}^{ik} \dot{\underline{q}}^k \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^kT \underline{\bar{K}}^{sk} \dot{\underline{q}}^k \right)^{1/2} \right\} \frac{rdr}{\cos} \quad (\text{IV.35})$$

Há ainda a necessidade de se considerar todas as velocidades de deslocamentos referidas a um mesmo sistema de eixos globais, já que

$$d_{int} = \sum_k d_{int}^k \quad (\text{IV.36})$$

define-se \underline{L}^k como a matriz de projeção de $\dot{\underline{q}}$ sobre o sistema de eixos locais do elemento k, ou seja

$$\dot{\underline{q}}^k = \underline{L}^k \dot{\underline{q}} \quad (\text{IV.37})$$

A seguir incorporam-se tais considerações as matrizes de tensões plásticas, já definidas, sobre o sistema de eixos globais.

$$\underline{\bar{K}}^{ik} = \left(\frac{r}{\cos \alpha} \right)^2 \underline{L}^{kT} \underline{\bar{K}}^{ik} \underline{L}^k ; \quad \underline{\bar{K}}^{sk} = \left(\frac{r}{\cos \alpha} \right)^2 \underline{L}^{kT} \underline{\bar{K}}^{sk} \underline{L}^k \quad (\text{IV.38})$$

tendo-se por fim

$$d_{int}^k = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \left\{ \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T K^i \dot{q} \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T K^s \dot{q} \right)^{1/2} \right\} dr \quad (IV.39)$$

IV.5. POTÊNCIA DE DISSIPACÃO EXTERNA

A potência de dissipação externa em função das variáveis reduzidas definidas nas equações (II.2 e II.3) pode ser escrita por:

$$d_{ext} = \int (\rho_\phi \dot{u} + 2\rho_n \dot{w}) \frac{r dr}{\cos \alpha} + [r\bar{n}\dot{u} + r\bar{q}\dot{w} - hr\bar{m}\dot{\phi}]_{r_1}^{r_2} \quad (IV.40)$$

$$\text{com } \dot{\phi} = \frac{d\dot{w}}{ds}.$$

Definindo-se

$$\tilde{f}^k = [r\bar{n} \quad r\bar{q} \quad -hr\bar{m}]_{r_1}^{r_2} \quad (IV.41)$$

o vetor de cargas externas concentradas nos nós do elemento

$$\text{e } \tilde{p}^k = [\rho_\phi \quad 2\rho_n]^k \quad (IV.42)$$

vetor de cargas distribuídas ao longo do elemento. Escreve-se então:

$$(\rho_\phi \dot{u} + 2\rho_n \dot{w}) = \underline{\rho}^k{}^T \{\dot{\underline{w}}\} = \underline{\rho}^k{}^T \cdot \underline{u}^k \underline{a}^k =$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_\phi \\ 2\rho_n \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Substituindo-se \underline{a}^k conforme a equação (IV.3) tem-se

$$d_{\text{ext}}^k = \left| \int \underline{\rho}^k{}^T \underline{u}^k \underline{B}^{-k} \frac{rdr}{\cos \alpha} + \underline{f}^k{}^T \right| \cdot \dot{\underline{q}}^k = \underline{g}^k{}^T \cdot \dot{\underline{q}}^k \quad (\text{IV.44})$$

considerando-se o problema proposto o vetor \underline{f}^k é nulo, assim como a componente ρ_ϕ é nula, resultando

$$d_{\text{ext}}^k = \int (\underline{\rho}^k{}^T \underline{u}^k \underline{B}^{-k} \dot{\underline{q}}^k) \frac{rdr}{\cos \alpha} \quad (\text{IV.45})$$

integrando esta equação ao longo do elemento k ($s=r/\cos \alpha$)

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \begin{vmatrix} 0 & 2\rho_n \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \frac{rdr}{\cos \alpha} \underline{B}^{-k} \cdot \dot{\underline{q}}^k = \\ & = \int_{r_1}^{r_2} \{0 \quad 0 \quad 2\rho_n \quad 2\rho_n s \quad 2\rho_n s^2 \quad 2\rho_n s^3\} \frac{rdr}{\cos \alpha} \underline{B}^{-k} \cdot \dot{\underline{q}}^k = \\ & = 2\rho_n \int_{r_1}^{r_2} \left[0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{r}{\cos \alpha} \left(\frac{r}{\cos \alpha}\right)^2 \left(\frac{r}{\cos \alpha}\right)^3 \right] \frac{rdr}{\cos \alpha} \underline{B}^{-k} \dot{\underline{q}}^k = \\ & = 2\rho_n \cdot \underline{\bar{g}}^T \cdot \underline{B}^{-k} \dot{\underline{q}}^k \quad (\text{IV.46}) \end{aligned}$$

onde $\underline{\bar{g}}^T$ resulta da integral e é dado por:

$$\underline{\underline{g}}^T = \left\{ 0 \quad 0 \quad \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\cos \alpha} \quad \frac{r_1^3 - r_2^3}{3\cos^2 \alpha} \quad \frac{r_1^4 - r_2^4}{4\cos^3 \alpha} \quad \frac{r_1^5 - r_2^5}{5\cos^4 \alpha} \right\} \quad (\text{IV.47})$$

Uma vez que a dissipação externa total é obtida através da soma da dissipação interna de cada elemento, utiliza-se a matriz de projeção $\underline{\underline{L}}^k$, eq. (IV.37), para ser possível efetuar esta soma.

$$d_{\text{ext}}^k = 2\rho_n \cdot \underline{\underline{g}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^{-k} \cdot \underline{\underline{L}}^k \cdot \dot{\underline{\underline{q}}} = F \underline{\underline{G}}^{kT} \cdot \dot{\underline{\underline{q}}} \quad (\text{IV.48})$$

CAPÍTULO V

PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

V.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentam-se os métodos de programação não-linear utilizados no trabalho bem como justifica-se o emprego de cada um deles.

Os métodos de programação não-linear apresentam características próprias, que dependem da topologia da função objetivo, a qual deseja-se minimizar ou maximizar, e das restrições de igualdade ou desigualdade impostas as variáveis independentes^{33, 35, 36}.

Para a aproximação estática foram experimentados três métodos de programação não-linear. A técnica da minimização sequencial sem restrições³¹ - SUMT (sequential unconstrained minimization technique), como era esperado no início do trabalho, apresentou boa performance tendo sido programada especialmente para uso na aproximação estática. Outro método usado foi o método do gradiente reduzido generalizado versão Abadie^{38, 39} - GRGA cuja implantação no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ esteve sob responsabilidade do Programa de Engenharia de Sistemas da COPPE/UFRJ³⁹. Este método não apresentou boa performance para uso na aproximação estática.

O terceiro método experimentado é o método da tolerân-

cia flexível (FLEX) como apresentado por David M. Himmelblau³³. Este método também não apresentou boa performance para uso na aproximação estática.

Para a aproximação cinemática foram experimentados dois métodos. O GRGA cuja performance neste caso foi boa e o FLEX com performance bem inferior ao GRGA. Esclarece-se, entretanto, que a utilização do algoritmo SUMT também seria possível para a aproximação cinemática³² mas exigiria programação específica.

Descreve-se a seguir o mecanismo de funcionamento de cada um dos métodos e apresentam-se as formas de utilização para ambas as aproximações.

V.2. APRESENTAÇÃO DA TÉCNICA DA MINIMIZAÇÃO SEQUENCIAL SEM RESTRIÇÕES - SUMT

O algoritmo SUMT, de Fiacco e McCormick^{31,33} tem sido desenvolvido para solucionar o problema de programação não-linear no qual a função objetivo $f(x)$ e as restrições de desigualdade $g_i(x)$ podem ser funções não-lineares das variáveis independentes mas as restrições de igualdade $h_i(x)$ obrigatoriamente são funções lineares das variáveis independentes a fim de garantir-se a convergência da solução do problema.

A idéia básica do SUMT é resolver repetitivamente uma sequência de problemas sem restrições cujas soluções no limite se aproximam do mínimo da programação não-linear. Em 1967 a versão codificada do SUMT foi convertida em uma sequência de problemas sem restrições pela definição da função P , como segue:

$$P(x^k, p^k) = f(x^k) + (p^k)^{-1/2} \sum_{i=1}^m h_i^2(x^k) + p^k \sum_{i=m+1}^p \frac{1}{f_i(x^k)} \quad (V.1)$$

onde os fatores de ponderação p são positivos e formam uma sequência monotonicamente decrescente de valores $\{p | p^0 > p^1 > \dots > 0\}$.

As Figuras (V.1), (V.2) e (V.3) ilustram a seguinte função P

$$P(x) = (4x_1 - x_2^2 - 12) + p \left(\frac{1}{10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \quad (V.1a)$$

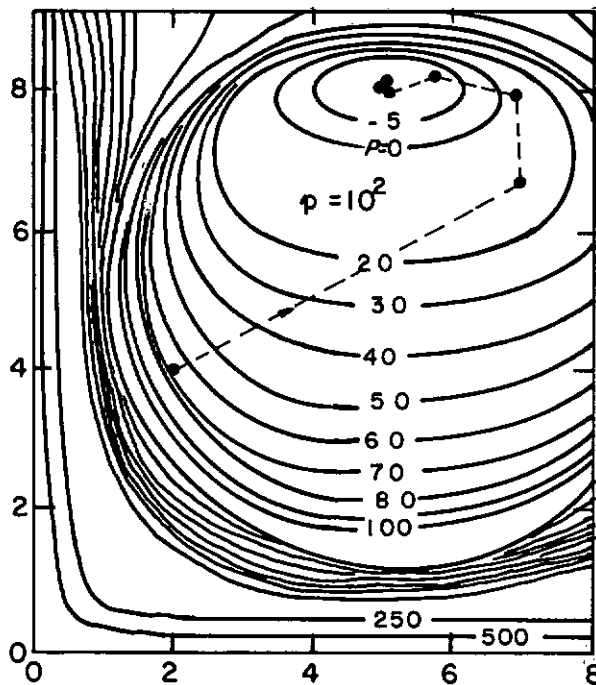


Fig.V.1 - Contorno da função P para $p = 10^2$

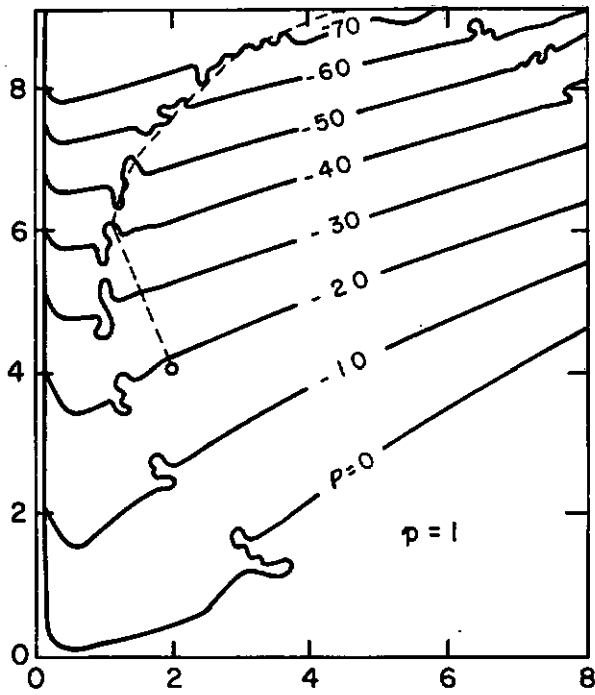


Fig.V.2_Contorno da função P para $p=1$

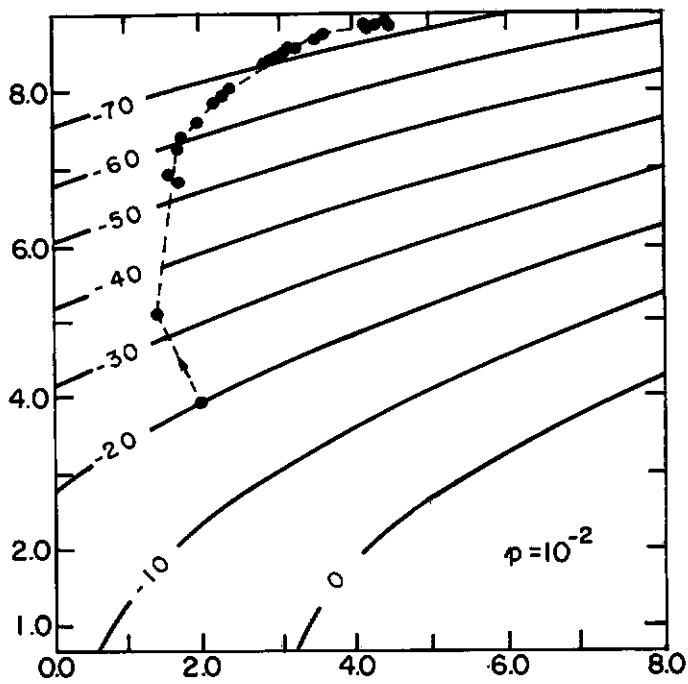


Fig.V.3_Contorno da função P para $p=10^{-2}$

para três diferentes valores de p . A função P é portanto um problema de programação não-linear no qual a função objetivo e as restrições podem ser facilmente identificadas termo a termo com a função (V.1). A linha tracejada da figura representa a trajetória da minimização de $P(x, p)$.

Note que Fiacco e McCormick³¹ originalmente escolhem fazer o funcional de restrições de desigualdades na forma de uma barreira acrescentada (eliminada durante a maximização).

$$G(g(x^k)) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{g_i(x^k)} \quad (V.2)$$

para um ou mais $g_i(x^k) \rightarrow 0$ a partir da região admissível, $G(g(x^k)) \rightarrow \infty$; originando o conceito de barreira. Como p^k é reduzido, o efeito da barreira é reduzido, e x pode se mover próximo ao limite de uma restrição de desigualdade. Existem outras possibilidades de escolhas para $G(g(x^k))$ tais como:

$$G(g(x^k)) = \sum_{i=1}^p \min\{0, g_i(x^k)\}^2 \quad (V.3)$$

ou
$$G(g(x^k)) = - \sum_{i=1}^p \ln(g_i(x^k)) = \sum_{i=1}^p \ln \frac{1}{g_i(x^k)}$$

Na versão codificada de 1970 do SUMT a função de penalidade utilizada foi

$$P(x^k, p^k) = f(x) + \frac{1}{p^k} \sum_{i=1}^m h_i^2(x^k) - p^k \sum_{i=m+1}^p \ln g_i(x^k) \quad (V.4)$$

Em ambas as versões do código a forma $H(h(x^k))$ escolhidos foram simplesmente a soma dos quadrados das respectivas restrições de igualdade, tal que $p^{(k)} \rightarrow 0$, as restrições de igualdade são mais e mais aproximadamente satisfeitas. Apesar de, em princípio, cada restrição de igualdade poder ser separada em duas desigualdades e assim tratadas, na prática este tipo de aproximação é bastante insatisfatório - retardando a pesquisa excessivamente e tendendo a causar terminação prematura.

A minimização das funções (V.1) e (V.4) é iniciada em um ponto interior (ou ponto limitado), isto é, um ponto x^0 no qual todas as restrições de desigualdade estão satisfeitas. Depois que p^0 é computado, x^1 é determinado pela minimização de $P(x, p^0)$. Então p^1 é computado e x^2 determinado pela minimização de $P(x^1, p^1)$, e assim sucessivamente.

O processo descrito apresenta algumas dificuldades. Primeiro, a matriz hessiana da função P torna-se progressivamente mal condicionada a medida que se aproxima do extremo; logo a direção de busca pode tornar-se ineficiente. Segundo, a taxa de convergência depende da escolha do ponto inicial p^0 e do método de redução de p^k .

Finalmente, a maioria das informações sobre a topologia de $f(x)$ e $P(x, p)$ é descartada de um estágio para outro, mesmo assim algum tipo de extrapolação pode ser incorporada ao algoritmo.

V.3. APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DO GRADIENTE REDUZIDO GENERALIZADO - GRGA

O método do gradiente reduzido de Wolfe^{3 8}, para resol-

ver os problemas de programação matemática com função objetivo não-linear continuamente derivável na qual as restrições são lineares, está generalizado por Abadie e Carpentier^{3 8} para o caso onde as restrições são não-lineares. Se as funções que representam as restrições forem continuamente deriváveis, a convexidade não é então exigida. Caso a convexidade não seja exigida o ótimo pode ser local.

O método do Gradiente Reduzido Generalizado por Abadie^{3 9} (GRGA) representa no plano teórico uma generalização do método Simplex de programação linear. Em razão da não-linearidade da função objetivo, seu gradiente não é mais constante e é necessário o cálculo em cada novo ponto. Por outro lado mesmo aplicado a um programa linear, o método do gradiente reduzido é uma generalização no sentido que em lugar de proceder uma otimização segundo uma só componente do gradiente, a pesquisa do ótimo se efetua segundo uma direção que põe em jogo várias componentes (correspondentes as variáveis independentes) de cada vez e os valores das variáveis independentes não são mais obrigatoriamente iguais a um de seus limites.

Conforme a dimensão dos problemas, certas similaridades entre o GRGA e o Simplex permitem adaptar os aperfeiçoamentos de cálculos introduzidos ao nível de programação linear de grande estatura, notadamente as técnicas de matrizes geradas pela inversão e a atualização da matriz de base.

Por outro lado, o GRGA realiza uma série de programas não-lineares sem restrições dentro do sub-espço das variáveis independentes limites. Pode-se então introduzir os métodos de otimização sem restrições, (de melhor performance) com ligeiras modificações destinadas a evitar a violação das restrições dos

limites sobre estas variáveis.

Considera-se um programa matemático sobre a forma canônica seguinte:

$$\text{Maximizar } f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in E^n \quad (V.5)$$

$$\text{sobre a condição } h_i(\underline{x})=0 \quad i=1,\dots,m \quad (V.6)$$

$$L_j \leq x_j \leq U_j \quad j=1,\dots,n \quad (V.7)$$

e ainda que $P=\{\underline{x} | a \leq x \leq b\} \subseteq E^n$ é um paraleloide definido pelos limites sobre \underline{x} .

Esta formulação é suficientemente generalizada para representar todos os problemas de programação não-linear, porque as restrições de desigualdade podem sempre ser transformadas em restrições de igualdade pela introdução de variáveis auxiliares.

Utilizam-se as notações matriciais seguintes:

$\underline{A} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}}$ é o jacobiano ($m \times n$) das funções h em relação as variáveis \underline{x}

A_i é a linha i de \underline{A}

A_j é a linha j de \underline{A}

A_i^j é um elemento (i,j) de \underline{A}

$\underline{A}^k = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_k}$ é a sub-matriz formada das colunas $\{A_j^j | j \in k\}$

\underline{e}^k é o vetor-linha formada dos elementos $\{e^i | i \in k\}$.

Seja \underline{x}^0 uma solução admissível, isto é, que satisfaça

as restrições (V.6) e (V.7).

As m equações não-lineares (V.6) podem ser utilizadas para eliminar m das n variáveis. Considera-se uma partição do vetor $\underline{x} \in E^n$ em dois sub-vetores: $\underline{x}_B \in E^m$ (vetor de componentes básicos) e $\underline{x}_N \in E^{n-m}$ (vetor de componentes não básicos). A expressão analítica de \underline{x}_B em função de \underline{x}_N , $\underline{x}_B = F(\underline{x}_N)$, não pode em geral ser obtida explicitamente. Supõe-se que a matriz quadrada $m \times m$: $\partial h / \partial \underline{x}_B^0$ é regular, isto que permite exprimir \underline{x}_B em função derivável de \underline{x}_N dentro de vizinhança do ponto $(\underline{x}_B^0, \underline{x}_N^0)$ verificando $h(\underline{x}_B^0, \underline{x}_N^0) = 0$.

O Jacobiano de F pode ser obtido como segue:

se $d\underline{x}_B$, $d\underline{x}_N$ são compatíveis com as restrições (V.6),

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_B} d\underline{x}_B + \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_N} d\underline{x}_N = 0 \quad (V.8)$$

A variação da função objetivo na vizinhança de \underline{x}^0 fica:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{x}_B} d\underline{x}_B + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}_N} d\underline{x}_N \quad (V.9)$$

de onde:

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}_N} - \frac{\partial f}{\partial \underline{x}_B} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}_B} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_N} \right] d\underline{x}_N$$

Fazendo-se $\underline{\beta} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}_B}$ e introduzindo-se as notações definidas anteriormente:

$$df = [\underline{e}^N - \underline{e}^B \underline{\beta}^{-1} \underline{A}^N] d\underline{x}_N, \quad (V.11)$$

o que permite definir o gradiente reduzido no sentido de Wolfe^{3,8}

$$\underline{g}^N = \underline{e}^N - \underline{e}^B \underline{\beta}^{-1} \underline{A}^N \quad (V.12)$$

A matriz $\underline{\beta}$ representa uma regra análoga aquela da matriz de base em programação linear.

No entanto uma diferença fundamental em relação ao método Simplex é que nele podem ocorrer variáveis independentes vinculadas por um de seus limites, portanto a evolução do GRGA não será limitada a uma sequência de soluções básicas.

Por dispor de uma direção d_N de deslocamento das variáveis independentes que seja otimizante e admissível, se faz uma projeção do gradiente reduzido \underline{g}^N a fim de evitar-se sair do paraleloide P , quer dizer que se anulam as componentes, em função de seu sinal, correspondente as variáveis situadas na fronteira de P .

A direção d_B de deslocamentos das variáveis básicas será calculada de forma que a direção $d=(d_B, d_N)$ fique amarrada ao hiperplano tangente as superfícies definidas pelas restrições (V.6). Portanto:

$$\frac{\partial h}{\partial x_B^0} d_B + \frac{\partial h}{\partial x_N^0} d_N = 0 \quad d_B = -\left(\frac{\partial h}{\partial x_B^0}\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_N^0} d_N = -\underline{\beta}^{-1} \underline{A}^N d_N \quad (V.13)$$

Escolhe-se em seguida um passo p , por um processo de pesquisa unidimensional, para fazer progredir o ponto.

Enquanto que x_N se desloca linearmente segundo a tangente, x_B deve se deslocar não linearmente de forma a verificar

continuamente as restrições de igualdade (V.6). No algoritmo es ta progressão se fará em duas partes:

a) um deslocamento linear segundo a tangente:

$$\begin{cases} x_N = x_N^0 + p d_N \\ x_B = x_B^0 + p d_B \end{cases}$$

b) uma correção em x_B se impõe para fazer o ponto obtido, reentrar no domínio admissível; emprega-se um método iterativo de resolução dos sistemas de equações não-lineares (uma variação do método de Newton no presente estudo).

Ao ponto admissível assim obtido, verifica-se o valor da função objetivo. Se for melhor que o de partida recomeça-se uma nova iteração do GRGA, se não reduz-se o passo p e recalcula-se um ponto admissível.

O algoritmo se deterá então em um ponto estacionário de Kuhn e Tucker^{31,35} que corresponde a um ótimo local (ou global quando se trata de um problema convexo).

V.4. APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE TOLERÂNCIA FLEXÍVEL - FLEX

O problema geral de programação não-linear³³ é:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(\underline{x}) && \underline{x} \in E^n \\ &\text{sujeita a } h_i(\underline{x}) = 0 && i = 1, \dots, m \\ & && g_i(\underline{x}) \geq 0 \quad i = m+1, \dots, p \end{aligned} \quad (V.14)$$

onde $f(\underline{x})$, $h_i(\underline{x})$ e $g_i(\underline{x})$ podem ser funções lineares e/ou não-lineares. Em muitos métodos de programação não-linear uma parte considerável do tempo computacional é gasto em satisfazer condições rigorosas de admissibilidade.

O algoritmo da tolerância flexível, por outro lado, obtém o valor de função objetivo pelo uso de informações provenientes de pontos admissíveis, como também de certos pontos não admissíveis chamados pontos admissíveis próximos. Os limites dessa proximidade são gradualmente feitos mais restritos ao longo do processo de pesquisa em direção à solução do problema de programação, até que no limite somente vetores admissíveis \underline{x} em (V.14) são aceitáveis. Como resultado dessa estratégia básica o problema (V.14) pode ser substituído por um problema mais simples, tendo a mesma solução

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(\underline{x}) \quad & \underline{x} \in E^n \\ \text{sujeito a } \phi^k - T(\underline{x}) & \geq 0 \end{aligned} \tag{V.15}$$

onde ϕ^k é o valor do critério de tolerância flexível para admissibilidade no estágio k da pesquisa, e $T(\underline{x})$ é um funcional positivo de todas as restrições de igualdade e/ou desigualdade, do problema (V.14) usado como uma medida da extensão da violação de restrições.

V.5. UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE MINIMIZAÇÃO SEQUENCIAL SEM RESTRIÇÕES (SUMT)

O problema de programação não-linear está apresentado

no capítulo III em sua forma final pelas equações (III.22) para a aproximação estática.

A função objetivo está dada por

$$f(\lambda, \bar{a}) = -\lambda \quad (V.16)$$

uma vez que se deseja encontrar o máximo valor de λ o sinal negativo é necessário pois se usa uma técnica de minimização.

As restrições de desigualdade são dadas pela expressão

$$g_i(\bar{a}, \lambda): 1 - \frac{1}{2} (\lambda^2 B + \lambda \bar{a}^T Z_i^k + \lambda Z_i^k \bar{a} + \bar{a}^T W_i^k \bar{a}) \geq 0 \quad (V.17)$$

Como a função objetivo é bastante simples e as restrições mais complexas, aumenta-se a função objetivo com um termo de penalidade, o qual deve ser pequeno nos pontos afastados das restrições no domínio admissível, mas que deve crescer rapidamente ao se aproximar da restrição³³. Esta é a filosofia do algoritmo do SUMT como codificado em 1967, equação (V.1).

Tem-se então a função de penalização P dada por

$$P(\bar{a}, \lambda, p) = f(\lambda, \bar{a}) + p \sum \frac{1}{g_i(\bar{a}, \lambda)} \quad (V.18)$$

onde p é o parâmetro sequencial que sofrerá reduções consecutivas a cada minimização da função de penalização.

Cada elemento apresenta quatro restrições, duas por nó (folha superior e folha inferior) portanto tem-se o número de restrições (NR) igual a quatro vezes o número de elementos (N), exceto para cascas com "fechamento cônico" o qual possui apenas

um n.º.

Em termos das equações (V.16) a (V.18)

$$P(\bar{a}, \lambda, p) = -\lambda + p \sum_{i=1}^{NR} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} (\lambda^2 B_j^k + \lambda \bar{a}^T Z_j^k + \lambda Z_j^k \bar{a} + \bar{a}^T W_j^k \bar{a})} \quad (V.19)$$

Utiliza-se para a minimização da função de penalização P , sem restrições, o método de Davidon-Fletcher-Powell³³ (DFP) o qual é um importante método gradiente, ou seja, um método que usa somente derivadas de primeira ordem. Durante o processo de minimização de DFP uma série de matrizes métricas converge para a inversa da matriz hessiana de (V.19), desta forma o processo aproxima-se da eficiência do método de Newton-Raphson após alguns passos de busca sem a necessidade de cálculo da segunda derivada e da inversão da matriz hessiana.

Esclarece-se que qualquer outro método de minimização sem restrições pode ser usado em lugar do método de DFP.

As derivadas parciais de primeira ordem da função de penalização para cada variável são:

$$\frac{\partial P(\bar{a}, \lambda, p)}{\partial \lambda} = p \sum_{j=1}^{NR} \left[(\lambda B_j^k + \frac{\bar{a}^T Z_j^k}{2} + \frac{Z_j^k \bar{a}}{2}) / g_i^2(\bar{a}, \lambda) \right] \quad (V.20)$$

$$\frac{\partial P(\bar{a}, \lambda, p)}{\partial \bar{a}_i} = \frac{p}{2} \sum_{i=1}^{NR} \left[\lambda Z_i^k + \lambda Z_i^k + \sum_{j=1}^{NA} a_j (W_{ij} + W_{ji}) \right] / g_i^2(\bar{a}, \lambda)$$

A sequência do método de DFP é dada por:

$$\bar{x}_{\ell+1} = \bar{x}_{\ell} + \alpha_{\ell} \cdot D_{\ell} \quad (V.21)$$

onde o vetor \tilde{X} é formado pelas variáveis em questão, o vetor \tilde{D}_ℓ determina a direção de progressão e é próprio do método e α_ℓ minimiza a função $F(\tilde{X}_\ell + \alpha_\ell \tilde{D}_\ell)$.

É necessário recorrer-se a um método de busca unidimensional. Um processo muito importante é aquele que utiliza uma sequência de números denominada série de Fibonacci^{3,4} e outro é o método da seção^{3,3} aurea. Esses métodos após um pequeno número de passos se equiparam. Utiliza-se neste trabalho o método da seção aurea Figura (V.4) o qual é baseado na divisão de uma linha em dois segmentos. A razão entre a linha inteira e o maior segmento é a mesma razão entre o maior segmento e o menor. Duas frações de Fibonacci são empregadas

$$F_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 \quad \text{e} \quad F_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62 \quad (\text{V.22})$$

Note que $F_1 = F_2^2$ e que $F_1 + F_2 = 1$.

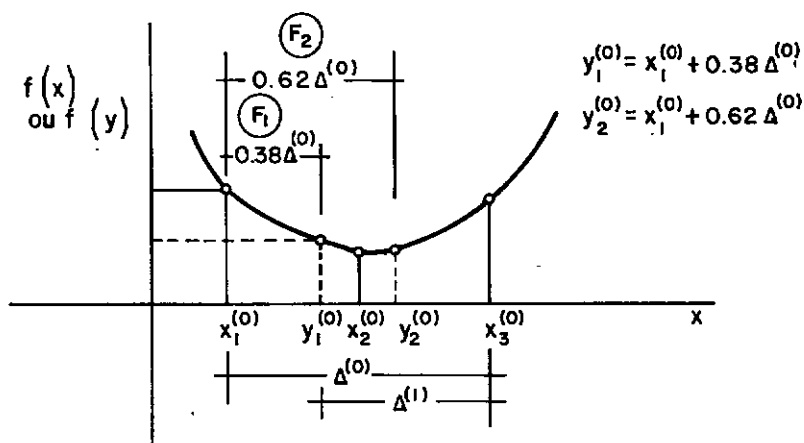


Fig. V.4 - Seção áurea : o ponto inicial ocorre

em $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ e $x_3^{(0)}$. Porque $f(y_1^{(0)}) > f(y_2^{(0)})$, $\Delta^{(1)} = (x_3^{(0)} - y_1^{(0)})$ e $x_1^{(1)} = y_1^{(0)}$ e $x_3^{(1)} = x_3^{(0)}$ reduz-se o intervalo para o estágio 1.

Emprega-se um método de detecção de alguma violação das restrições de desigualdade na busca unidimensional para evitar que o algoritmo ultrapasse o domínio admissível.

A convergência do processo de minimização de Davidon-Fletcher-Powell atende ao seguinte critério:

$$\nabla \underline{P}^T \cdot \underline{H}^{-1} \cdot \nabla \underline{P} \leq \epsilon_1 \quad \text{adotando-se} \quad \epsilon_1 = 10^{-5} \quad (\text{V.23})$$

onde $\nabla \underline{P}$ é o vetor de derivadas parciais da função de penalização e \underline{H}^{-1} é o resultado da convergência de matrizes métricas, já aproximadamente igual a matriz hessiana inversa. Utiliza-se também um critério adicional para prevenir terminação prematura do método por problemas de mal condicionamento das matrizes. Esse critério adicional é dado por:

$$\frac{\Delta \underline{X}}{\underline{X}} \leq \epsilon_2 \quad \text{adotando-se} \quad \epsilon_2 = 10^{-3} \quad (\text{V.24})$$

onde \underline{X} é o vetor das variáveis em questão.

A cada sequência de minimização é necessário reduzir o valor de p . Através de experiências numéricas o valor inicial de p e seu decréscimo foram tomados iguais a:

$$p_0 = 1 \quad \text{e} \quad p_{n+1} = p_n / 10 \quad (\text{V.25})$$

onde n é o número da sequência.

Para estes valores a convergência do SUMT mostrou-se estável e o tempo de processamento menor do que em outras experiências⁵⁴.

Estabelece-se o critério de finalização da otimização global do algoritmo SUMT através de:

$$\left| \frac{P(\bar{a}, \lambda, p)}{f(\bar{a}, \lambda)} + 1 \right| \leq \epsilon_3 \quad \text{adotando-se} \quad \epsilon_3 = 0,005 \quad (\text{V.26})$$

Os valores adotados para ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 são experimentais e levam em consideração que a minimização de cada sequência de ve atender a minimização global.

V.6. UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DO GRADIENTE REDUZIDO GENERALIZADO

O método GRGA^{30,39} implantado no NCE/UFRJ foi utilizado na obtenção de alguns resultados. O programa do GRGA resolve o problema matemático apresentado pelas equações (V.5) a (V.7).

O usuário pode introduzir certas opções. O programa utiliza o método de direções conjugadas de Fletcher-Reeves. Pode-se fazer a modificação correspondente da direção do gradiente e utilizar a diagonalização de Forsythematzkin.

O número máximo de iterações usual é de 150 podendo ser modificado. Caso as restrições (V.6) e (V.7) não sejam satisfeitas pelo ponto de partida arbitrado, o programa introduz variáveis artificiais, com um peso, o qual também pode ser modificado.

A precisão de saída é verificada por um parâmetro adotado igual a 10^{-3} , o qual dá uma precisão excelente.

Para o problema de aproximação estática dado pelas equau

ções (III.22) tem-se:

$$f(\bar{a}, \lambda) = \lambda, \text{ função objetivo a qual se deseja maximizar e} \quad (V.27)$$

$$h_i(\bar{a}, \lambda): \frac{1}{2} (\lambda^2 B_i^k + \bar{a}^T Z_i^k + Z_i^k \bar{a} + \bar{a}^T W_i^k \bar{a}) - 1 \leq 0$$

as restrições de desigualdade.

É preciso ainda definir os limites superior e inferior das variáveis. Utilizam-se os limites

$$10^{-3} = L < \bar{a} < U = 10^3 \quad (V.28)$$

Para o problema de aproximação cinemática dado pelas equações (IV.7) tem-se

$f(\dot{q}) = -d_{int}$, função objetivo a qual se deseja maximizar. Notar que o sinal negativo vai conduzir a uma minimização.

A restrição de desigualdade é

$$h(\dot{q}): 1 - d_{ext} \leq 0 \quad (V.29)$$

As condições de contorno da estrutura são introduzidas através dos limites superior e inferior das variáveis

$$L_i < q_i < U_i \quad (V.30)$$

V.7. UTILIZAÇÃO DO MÉTODO DA TOLERÂNCIA FLEXÍVEL (FLEX)

O método FLEX, cuja codificação está apresentada por

D.M. Himmelblau³³, não indicava boa performance. Como o método não utiliza informações de derivadas e se baseia apenas em pontos admissíveis, o tipo de problema tratado neste trabalho, principalmente a aproximação estática com função objetivo muito mais simples do que as restrições, não é indicado para o método. A utilização deste método é portanto de interesse comparativo. Apresentam-se alguns resultados mais significativos.

O programa do FLEX resolve o problema matemático apresentado pelas equações (V.14).

É necessário definir no início o "TAMANHO" do poliedro flexível a ser utilizado durante a fase inicial. O valor recomendado do "TAMANHO", quando se pode estimar os limites superior e inferior das variáveis é:

1. "TAMANHO" \approx 20% da diferença entre o limite superior e inferior se a variação estimada para cada variável é aproximadamente igual.

2. "TAMANHO" \approx a menor diferença entre os limites superior e inferior se a variação estimada para cada variável por diferente.

Para os problemas deste trabalho o item 2 parece ser mais indicado para a maioria dos problemas.

O programa FLEX inclui uma subrotina chamada a cada vez que o valor combinado das restrições violadas excede o valor do critério de tolerância para o estágio corrente. Esta subrotina permite que o ponto de partida não seja admissível, entretanto, caso isto ocorra, o tempo de processamento é consideravelmente

maior.

Para o problema de aproximação estática dado pelas eqs. (III.22) tem-se

$$f(\bar{a}, \lambda) = \lambda \quad \text{função objetivo a qual se deseja maximizar e} \quad (V.31)$$

$$g_i(\bar{a}, \lambda): \frac{1}{2} (\lambda^2 B_i^k + \bar{a}^T Z_i^k + Z_i^k \bar{a} + \bar{a}^T W_i^k \bar{a}) \leq 1$$

as restrições de desigualdade.

Para o problema de aproximação cinemática dado pelas equações (IV.7) tem-se:

$$f(\dot{q}) = -d_{int}, \quad \text{função objetivo a qual se deseja maximizar}$$

A restrição de desigualdade é

$$g(\dot{q}): d_{ext} < 1 \quad (V.32)$$

As condições de contorno de estrutura são introduzidas através de restrições de igualdade

$$h_i(\dot{q}): \dot{q}_i = 0 \quad (V.33)$$

CAPÍTULO VI

RESULTADOS E COMPARAÇÕES

VI.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os limites inferior e superior da carga de colapso de cascas axissimétricas geometricamente diferentes^{4,1} discretizados por elementos finitos tronco cônicos, Figura (VI.1).

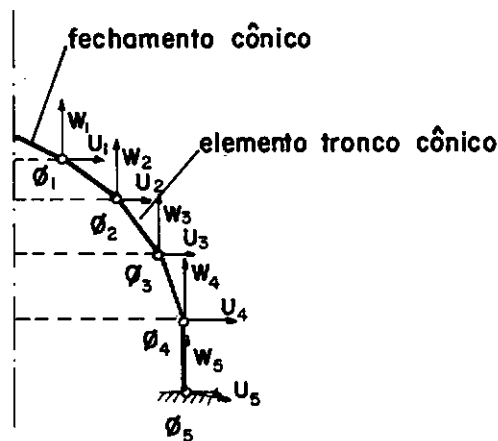


Fig. VI.1. Discretização da casca em elementos finitos

Comparam-se os limites encontrados para uma casca cônica engastada com o diagrama pressão x deslocamento obtido com o emprego do LORANE-NL^{4,2,53} através de uma análise elasto-plástica incremental. Mostra-se a convergência das formulações apre -

sentadas e dos métodos de programação não-linear utilizando-se os resultados da análise limite de uma casca cônica.

Resultados para carregamentos diferentes^{1,43} daqueles desenvolvidos nas formulações não são coerentes.

A análise elasto-plástica de uma placa circular engastada⁴⁹, discretizada por elementos finitos tridimensionais degenerados, fornece o diagrama pressão x deflexão que é comparado aos resultados da análise limite da placa. Mostra-se a performance dos métodos de programação não-linear quando se analisa uma placa circular e algumas instabilidades do método GRGA neste caso.

Apresentam-se os limites inferior e superior para diversas calotas esféricas. Uma delas é discretizada por elementos finitos tridimensionais degenerados⁴⁷, sendo estes resultados comparados aos limites obtidos pelas formulações tratadas neste trabalho. O resultado de uma esfera completa⁵⁰ assumindo-se pequenos deslocamentos elasto-plásticos é comparado aos limites inferior e superior.

Confrontam-se os limites encontrados para uma casca elíptica com o diagrama pressão x deslocamento obtido com o emprego do LORANE NL^{42,53} e discutem-se os limites obtidos para discretizações diferentes.

Os limites para uma casca torisférica com diferentes discretizações são também avaliados. Esses resultados são comparados com aqueles obtidos por estimativas teóricas^{45,46} e outros métodos⁵⁴.

A título de ilustração apresentam-se os limites superiores para um vaso de pressão axissimétrico⁴ (cilindro/esfera)

analisado para três diferentes espessuras e comparam-se estes resultados com os de uma análise elasto-plástica incremental⁴⁸.

VI.2. CASCA CÔNICA

Apresentam-se diversos resultados obtidos para a casca cônica da Figura (VI.2). Compara-se na mesma figura a discretização através de elementos finitos isoparamétricos utilizada no LORANE NL^{42,53} para obter-se a curva pressão x deslocamento da Figura (VI.3) com a discretização utilizada na análise limite conforme apresentado neste trabalho. Observa-se a simplicidade dos dados de entrada exigidos pela análise limite (coordenadas) em relação aqueles necessários a análise não linear (coordenadas, conectividade e carregamento).

A Figura (VI.3) mostra claramente o limite inferior bastante próximo do início da plastificação e a curva pressão x deslocamento tendendo a tangenciar o limite superior. Esses resultados correspondem ao esperado e mostram que a carga de colapso real está entre os dois limites, no caso mais aproximada do limite superior.

A convergência da formulação é mostrada nas Figuras (VI.4) e (VI.5) para duas cascas cônicas diferentes. Como o critério de plasticidade, na aproximação estática, é exigido apenas em cada nó, quando se refina a malha de discretização o limite deve sofrer alguma redução devido ao relaxamento do critério de plasticidade na própria formulação da aproximação estática. Um comportamento diferente deste pode ocorrer e em geral é justificado por dificuldades no processo de maximização ou minimização. 0

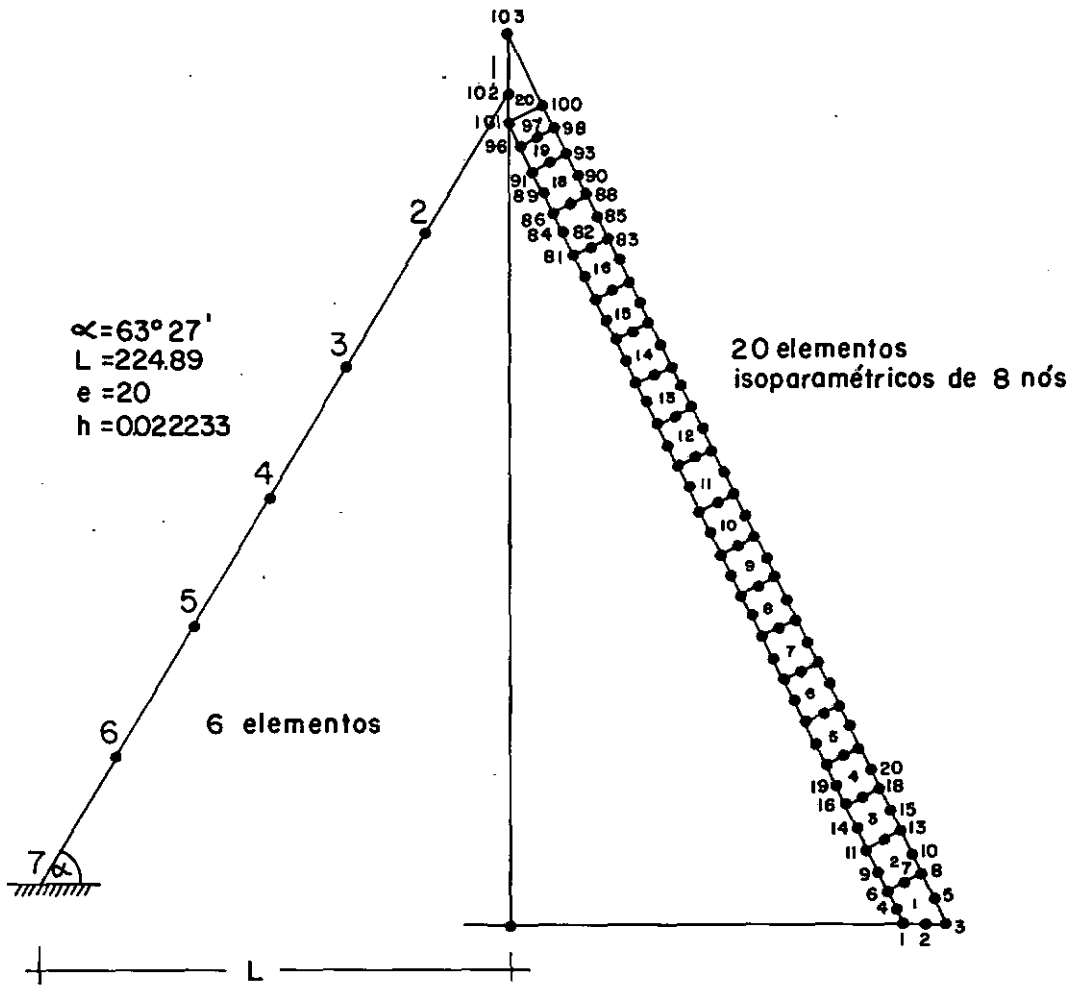


Fig. VI.2 - Casca cônica - discretização análise limite e LORANE NL

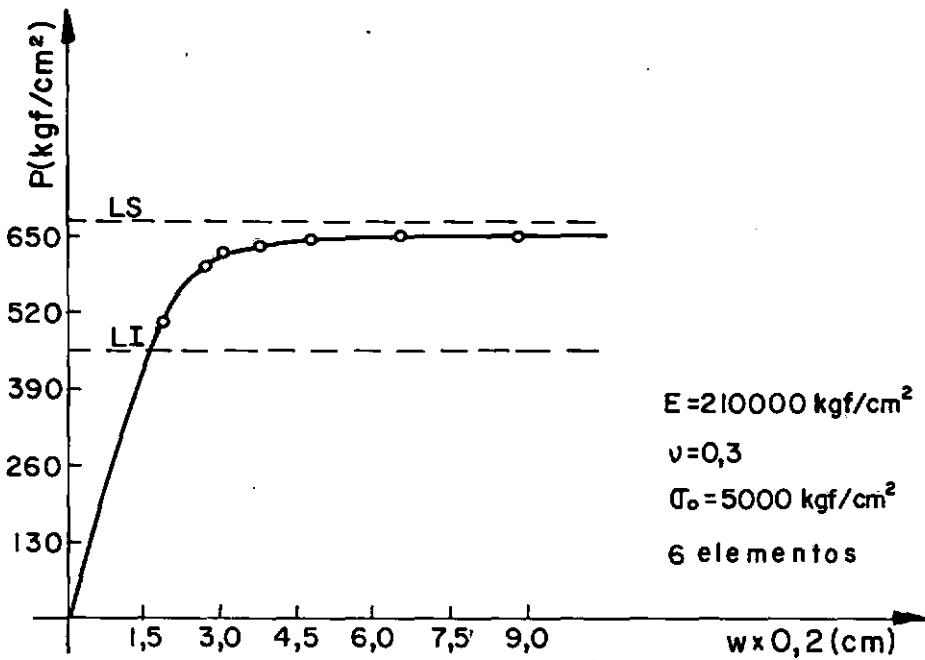


Fig. VI.3 - Casca cônica - curva pressão x deformação

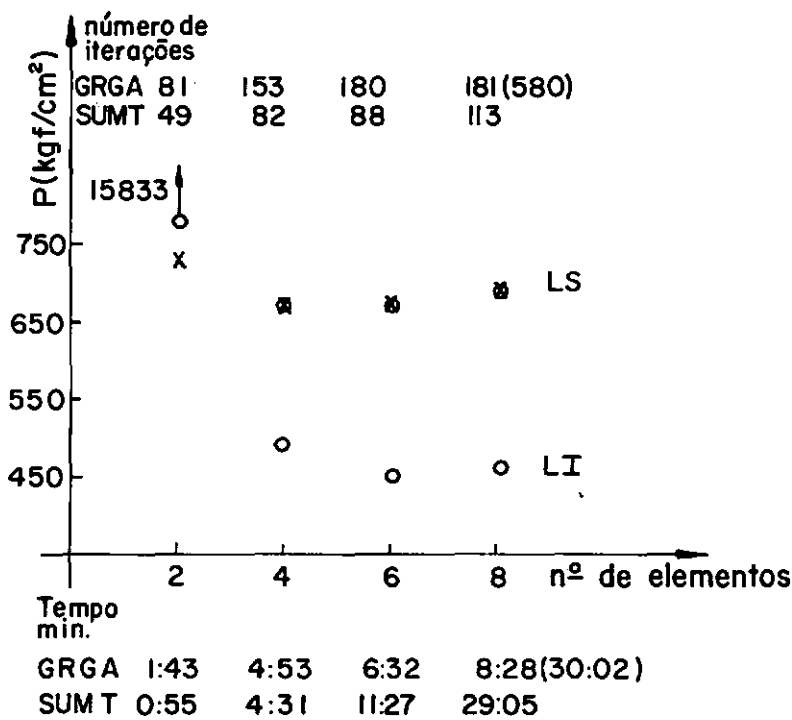


Fig. VI.4_Casca cônica (Fig. VI.2) - limites e tempo de processamento

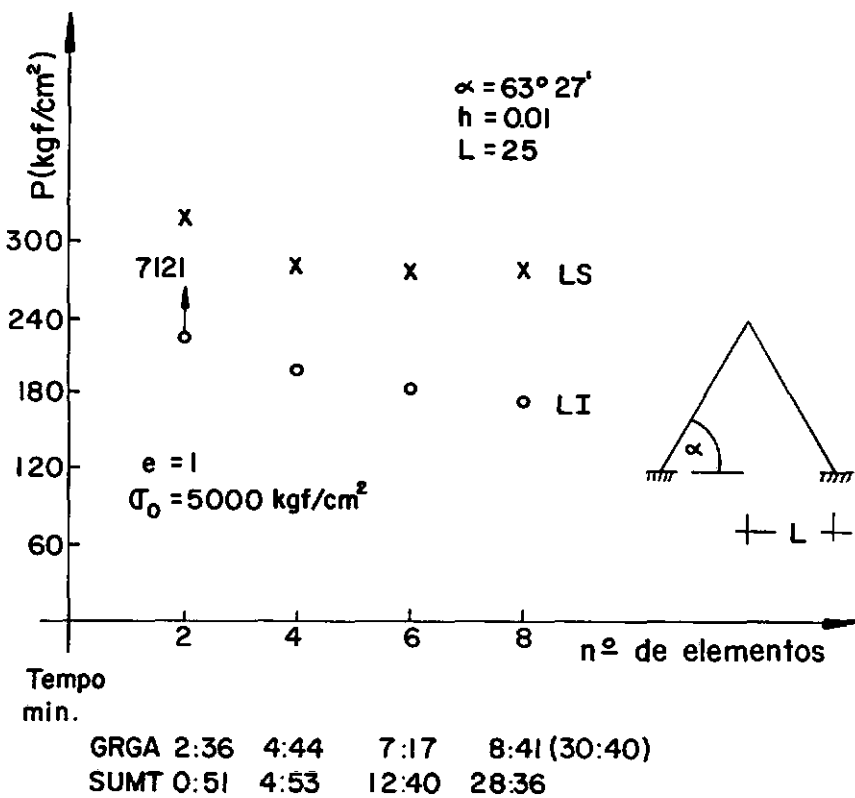


Fig. VI.5_Casca cônica-geometria, limites e tempo de processamento

processo é de alguma forma interrompido antes de chegar ao máximo ou mínimo, sem entretanto, tratar-se de um mal resultado. Esse resultado no entanto não é adequado para analisar-se a con - vergência.

Os tempos de processamento no sistema Burroughs 6700 do NCE/UFRJ apresentados nas Figuras (VI.4) e (VI.5) mostram que os resultados obtidos para oito elementos são bastante próximos da aqueles obtidos para quatro elementos. Entretanto os tempos de processamento aumentam 6.7 vezes para o limite inferior e 1.8 vezes para o limite superior, limitando-se o algoritmo (GRGA) a 180 iterações, chegando porém a aumentar 6.6 vezes quando não se usa este procedimento.

A distribuição da velocidade de deslocamentos é mostrada na Figura (VI.6) e a distribuição das tensões na Figura (VI.7).

A Figura (VI.8) mostra a variação da pressão em rela-ção a espessura para a casca cônica da Figura (VI.2) e a convergência dos algoritmos SUMT e GRGA pode ser estudada pelo diagrama da Figura (VI.9). Verifica-se que o tempo de processamento cresce bastante relativamente a uma pequena variação do limi-te quando a programação aproxima-se do máximo ou mínimo da fun-ção.

Uma comparação dos tempos de processamento entre o GRGA e FLEX está na Figura (VI.10), que contem também a geometria da casca cônica analisada⁵⁴. Nota-se que o FLEX apresenta uma va-riação de tempo de processamento considerável ao modificar-se o "TAMANHO" do poliedro inicial admissível, o que torna o método por demais inconveniente em termos práticos.

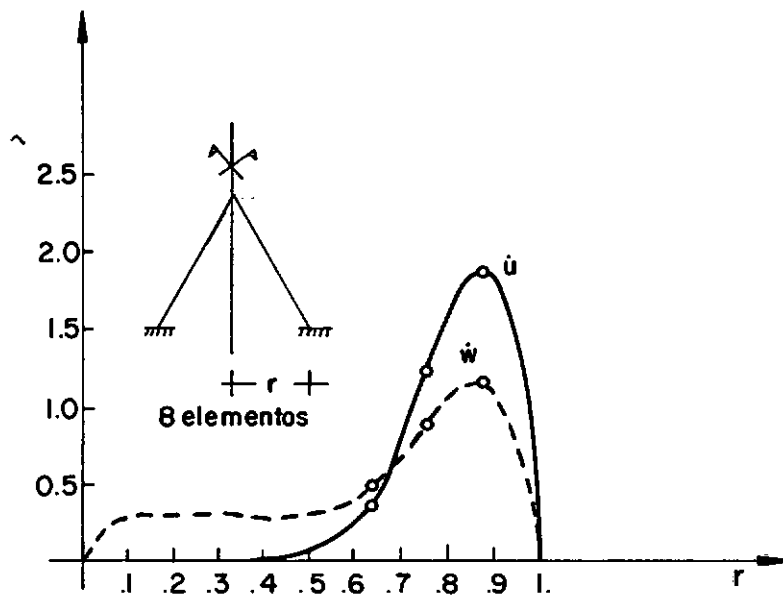


Fig. VI.6_Casca cônica - velocidades de deslocamento

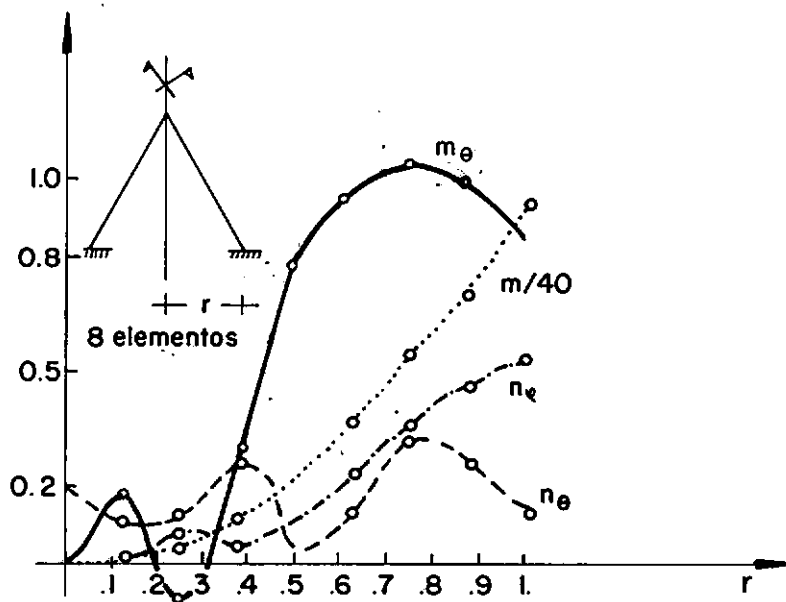


Fig. VI.7_Casca cônica - distribuição das tensões

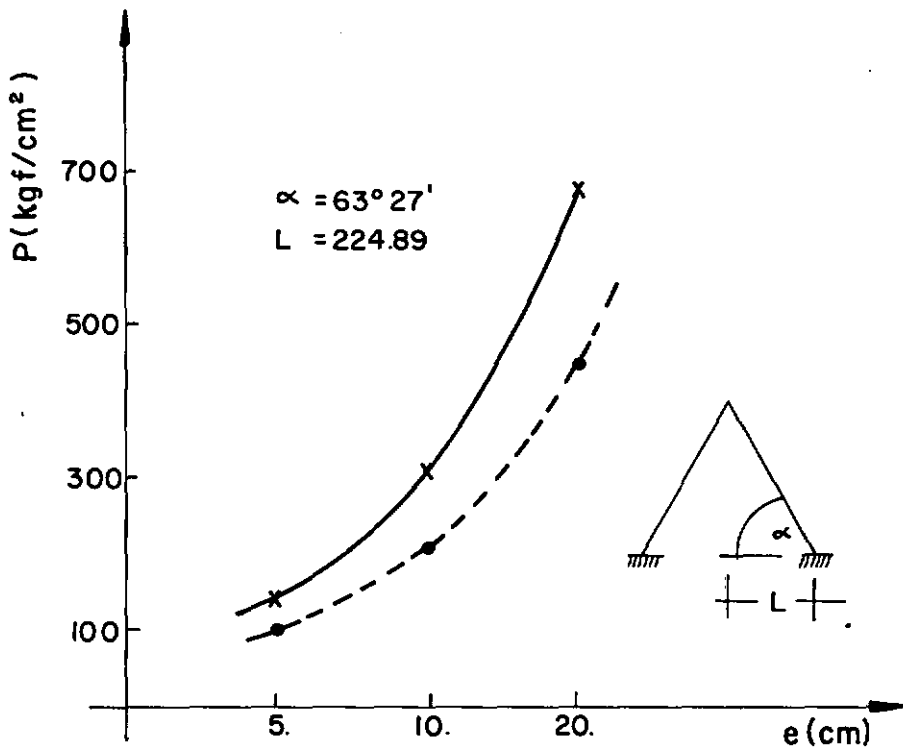


Fig. VI.8_Casca cônica-limites para diferentes espessuras

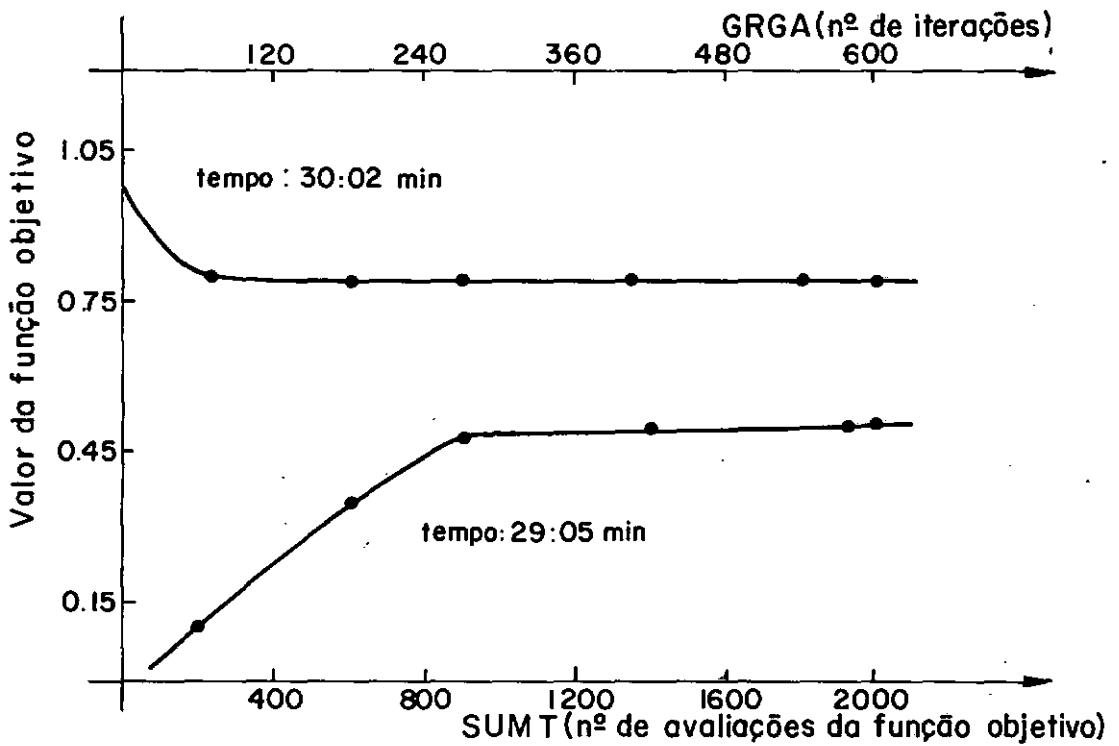


Fig. VI.9_Convergência do SUMT e do GRGA, casca (Fig. VI.2)

Analisa-se também uma casca cônica engastada com uma pequena abertura no vértice. Os resultados para diferentes espessuras estão na Figura (VI.11) onde observa-se o crescimento dos limites relativamente a espessura.

Os resultados obtidos utilizando-se o GRGA e FLEX na aproximação estática e o FLEX na aproximação cinemática não foram bons. Através da Tabela (VI.1) isto pode ser verificado.

Tabela (VI.1). Comparação dos métodos de programação não linear - casca cônica Fig. (VI.2)

Método	nº elem.	Limite	λ	tempo (min)	nº iterações
GRGA	2	SUP	0.82139	1:43	81
FLEX			1.03562	1:58	195
GRGA	4		0.75464	4:53	153
FLEX			0.91053	10:04	416
SUMT	4	INF	0.55828	4:31	6
GRGA			0.03483	1:20	15
FLEX			0.56314	30:03	80

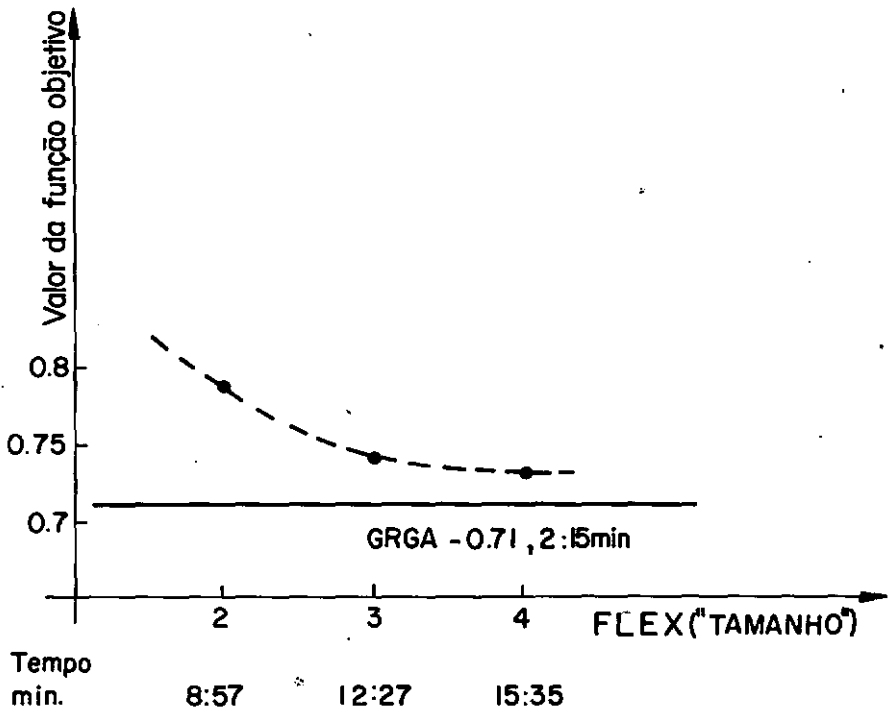


Fig. VI.10 - Comparação do GRGA x FLEX

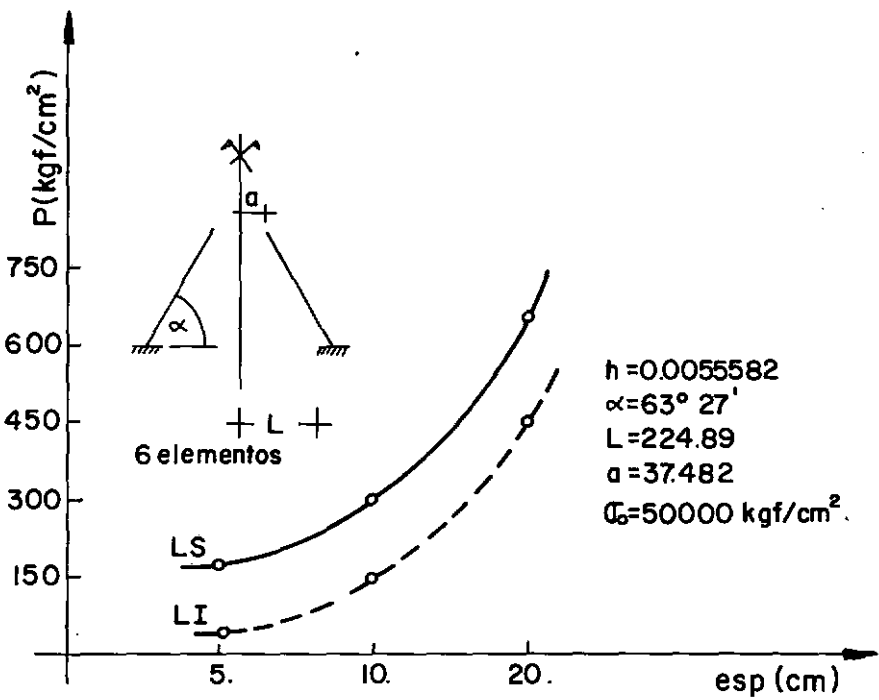


Fig. VI.11 - Casca cônica aberta - limites para diferentes espessuras

VI.3. PLACA CIRCULAR

A placa circular engastada da Figura (VI.12) está submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Ela é discretizada por elementos tridimensionais degenerados para análise não-linear de estruturas de superfície o qual é comprovadamente eficiente⁴⁹. Na Figura (VI.12) verifica-se que os limites obtidos mostram-se bastante satisfatórios. Alguma plastificação ocorre até que seja determinado o limite inferior. Isto porque para estruturas com pequena inclinação, ou sem inclinação como a placa, a formulação perde em sensibilidade o que não compromete a solução do problema.

A convergência da formulação é mostrada na Figura (VI.13) e na Figura (VI.14) analisa-se a instabilidade do GRGA quando fixam-se diferentes número de iterações. O método GRGA na tentativa de obter o máximo dentro do número de iterações fixado prejudica a solução real do problema de maximização quando se tem matrizes mal condicionadas como no caso da placa ($\alpha=0^\circ$).

Para a placa circular experimentou-se o GRGA e o FLEX na aproximação estática e o FLEX na aproximação cinemática. A Tabela (VI.2) mostra que os resultados não são bom pelos motivos já comentados no capítulo V deste trabalho. Deve-se observar que os resultados para o GRGA na aproximação estática não apresentam convergência e para o FLEX o tempo do processamento é sempre maior na obtenção do limite inferior. O FLEX apresentou dificuldades com o aumento do número de variáveis ao realizar a aproximação cinemática.

Alguns resultados analíticos apresentados por M. SAVE¹⁹ são bastante conservadores em relação aos limites aqui obtidos.

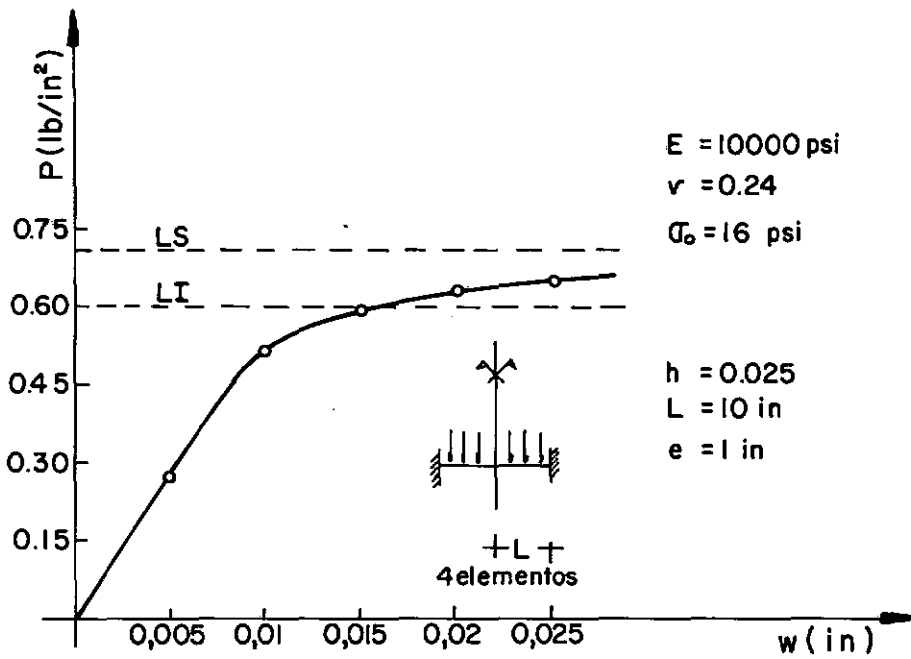


Fig.VI.12_Placa circular - curva pressão x deslocamento

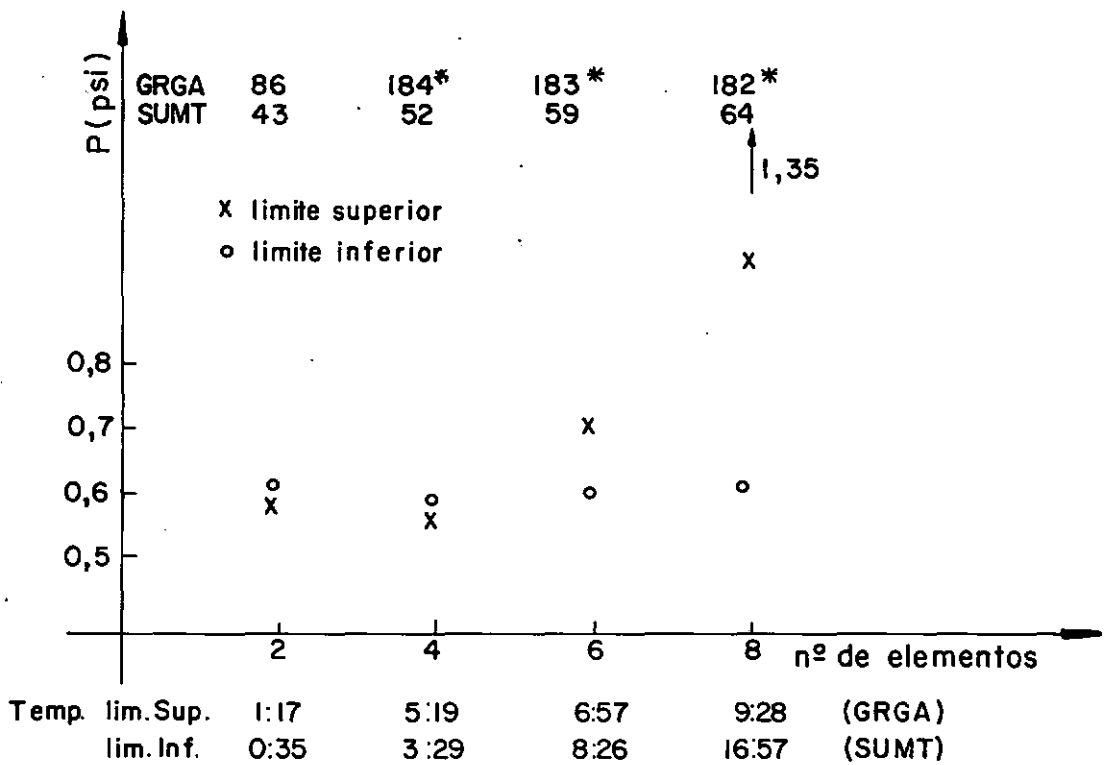


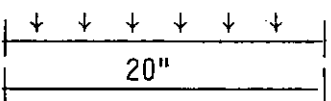
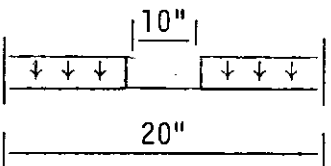
Fig.VI.13_Placa circular - limites e tempo de processamento

A Tabela (VI.3) procura mostrar essa diferença.

Tabela (VI.2). Comparação dos métodos de programação não-linear - placa circular Fig. (VI.12)

Método	nº elem.	limite	λ	tempo (min)	nº iterações
GRGA	2	SUP	0.18541	1:33	86
FLEX			0.18782	3:04	332
GRGA	4		0.175972	14:07	585
FLEX			0.307337	15:53	1069
SUMT	2	INF	0.189123	0:42	6
GRGA			0.191195	1:19	42
			0.18144	2:34	103
FLEX			0.18908	2:08	72
SUMT	4		0.18284	3:29	6
GRGA			0.13120	2:25	22
FLEX			0.18268	15:52	193

Tabela (VI.3). Comparações do limite com resultados analíticos

placa circular	pressão limite	resultado analítico	$\Delta\%$
	0.58 (lb/in ²)	0.51 (lb/in ²)	13.7
	0.86 (lb/in ²)	0.94 (lb/in ²)	-8.5

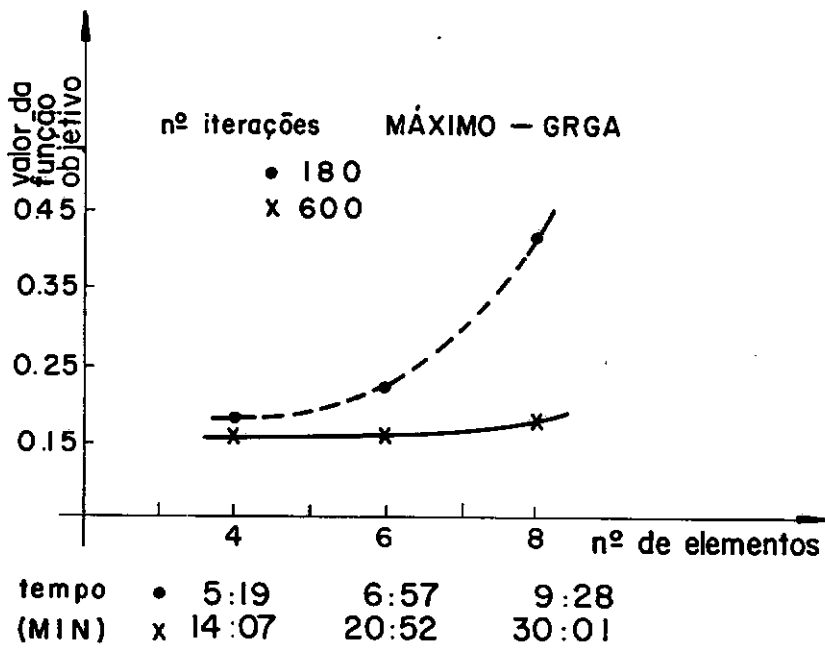


Fig. VI.14 - Instabilidade do GRGA - placa (Fig. VI.12).

VI.4. CALOTA ESFÉRICA E ESFERA

A calota esférica engastada da Figura (VI.15) está submetida a um carregamento radial uniformemente distribuído. Ela é discretizada por elementos finitos tridimensionais degenerados de elementos isoparamétricos tridimensionais quadráticos⁴⁷ com a carga distribuída aplicada em incrementos de 2.5 psi até atingir 57.5 psi, e utilizando-se o critério de von Mises.

Na Figura (VI.15) observa-se a proximidade do limite inferior do ponto de início da plastificação. A convergência da formulação é mostrada na Figura (VI.16) assim como os tempos de processamento no sistema Burroughs 6700 do NCE/UFRJ.

A Figura (VI.17) relaciona diversos limites de calotas esféricas⁵⁴ de acordo com o ângulo do segmento considerado e outras variações indicadas na Tabela (VI.4) a qual fornece os valores utilizados para o traçado do gráfico.

O resultado da análise estática da esfera⁵⁰ da Figura (VI.18), assumindo-se pequenos deslocamentos elasto-plásticos está relacionado nesta figura a pressão elástica clássica de ruptura dada por:

$$p_{CR} = \frac{2E}{[3(1-\nu^2)]^{1/2}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \quad (VI.1)$$

A análise elasto-plástica não prediz a carga de ruptura mas para o nível de carga igual a $0,67 p_{CR}$ (o qual está bastante próximo da pressão de escoamento analítica, igual a $0,673 p_{CR}$) os deslocamentos apresentam um incremento elevado porque a casca está completamente plastificada. O limite superior

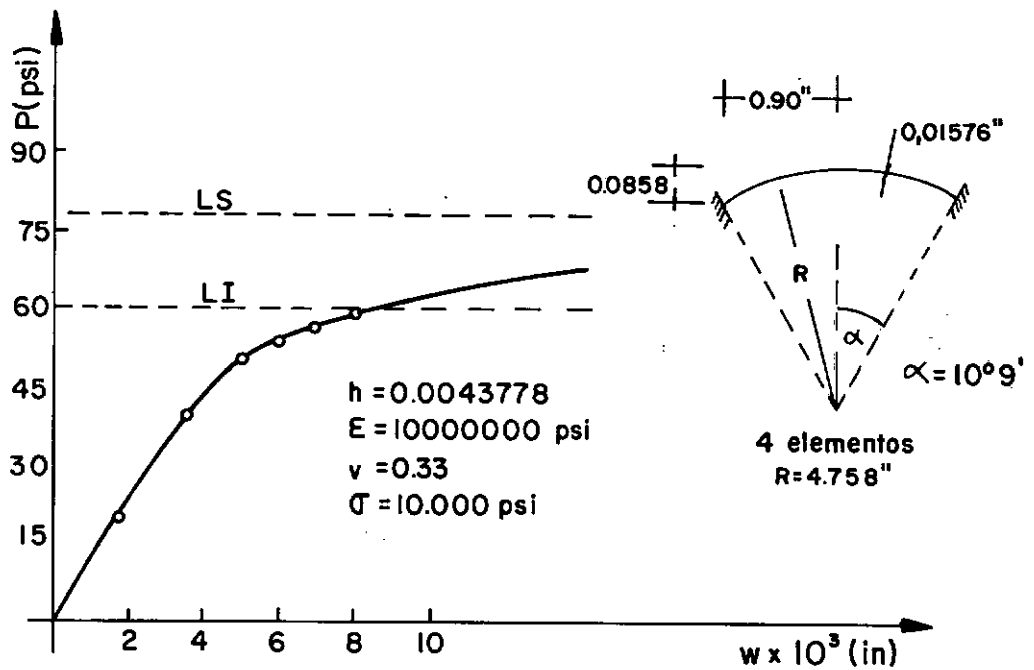


Fig. VI.15 - Calota esférica - curva pressão x deslocamento

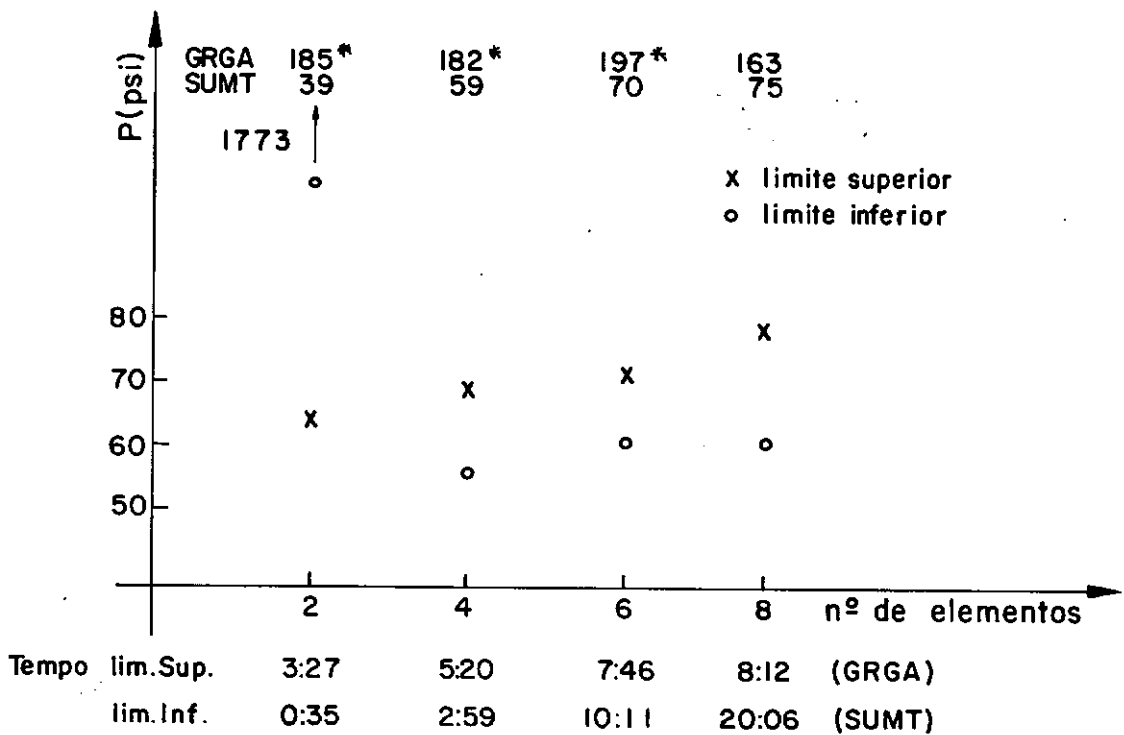


Fig. VI.16 - Calota esférica - limites e tempo de processamento

obtido pela aproximação cinemática apresentada neste trabalho es
tá próximo da pressão de escoamento analítica, sendo igual a
 $0,65 p_{CR}$, conforme Figura (VI.18).

Tabela (VI.4). Calotas esferas de diferentes geometrias

geometria	λ	limite	nº el.	Ref.
$\alpha=129^\circ$ $h=0.03$	0.2736	SUP	6	-
	0.2428		8	*
	0.2827	INF	6	-
	0.2316		10	*
$\alpha=159^\circ$ $h=0.02$	0.3267	SUP	6	-
	0.2745		8	*
	0.2964	INF	6	-
	0.2674		10	*
$\alpha=1698'$ $h=0.07197$	0.5569	SUP	6	-
	0.4786		8	*
	0.5327	INF	6	-
	0.4259		10	*
$\alpha=38950'$ $h=0.03189$	0.6460	SUP	6	-
	0.6455		8	*
	0.6054	INF	6	-
	0.6294		10	*
$\alpha=459^\circ$ $h=0.02828$	0.7253	SUP	6	-
	0.7223		8	*
	0.5193	INF	6	-
	0.7092		11	*

(*) Ref. 54

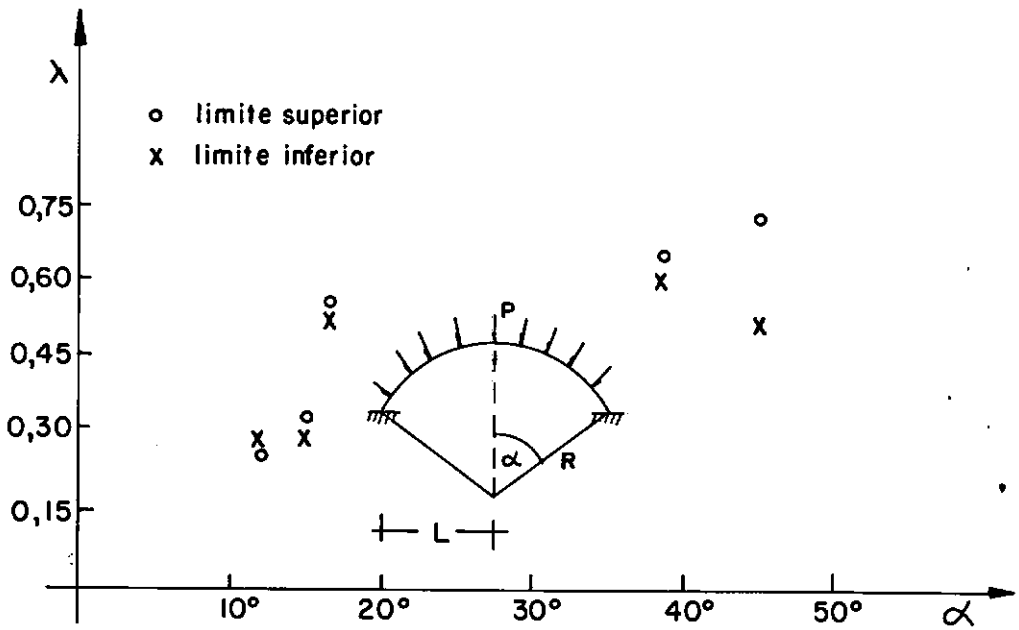


Fig.VI.17_Calota esférica-comparação de resultados

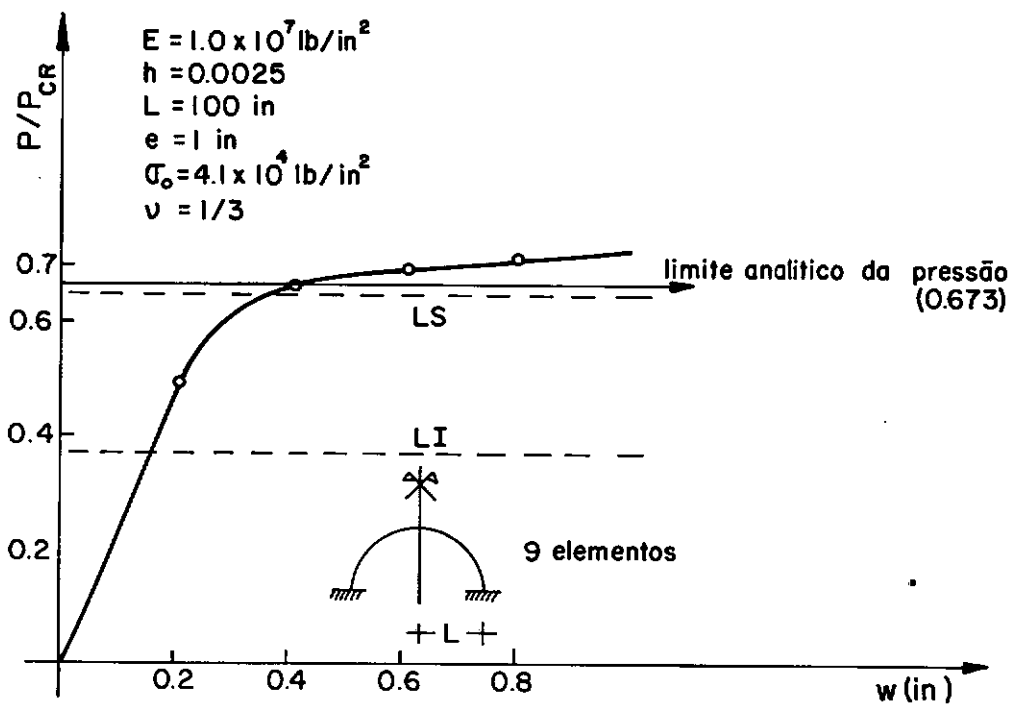


Fig.VI.18_Esfera completa-curva pressão x deslocamento

VI.5. CASCA ELÍPTICA

Neste item pretende-se comentar os resultados obtidos para a casca elíptica da Figura (VI.19). Compara-se na mesma figura a discretização através de elementos finitos isoparamétricos utilizado no LORANE NL^{42, 53} para obter-se a curva pressão x deslocamento da Figura (VI.20) com a discretização utilizada na análise limite conforme apresentado neste trabalho. Observa-se a simplicidade dos dados de entrada exigidos pela análise limite em relação aqueles necessários a análise não-linear.

A Figura (VI.20) deixa claro os resultados satisfatórios obtidos pela análise limite, principalmente em relação ao limite superior.

Pode ser notado através de comparação e análise das Figuras (VI.21) e (VI.22) os resultados divergentes quando se submete a casca elíptica a diferentes discretizações. Há necessidade de concentrar-se elementos na região de maior curvatura principalmente para a aproximação estática devido ao relaxamento da condição de escoamento. A Tabela (VI.5) fornece os valores utilizados para as Figuras (VI.21) e (VI.22).

Tabela (VI.5). Comparação entre diferentes discretizações - casca elíptica Fig. (VI.20)

h	Discret.	pressão limite ($\sigma_0 = 5000 \text{ kgf/cm}^2$)	
		superior	inferior
0.01	19	325.6	283.2
	29	291.0	292.4
0.015	19	512.0	448.1
	29	474.0	451.0
0.02	19	707.0	621.6
	29	644.0	619.0

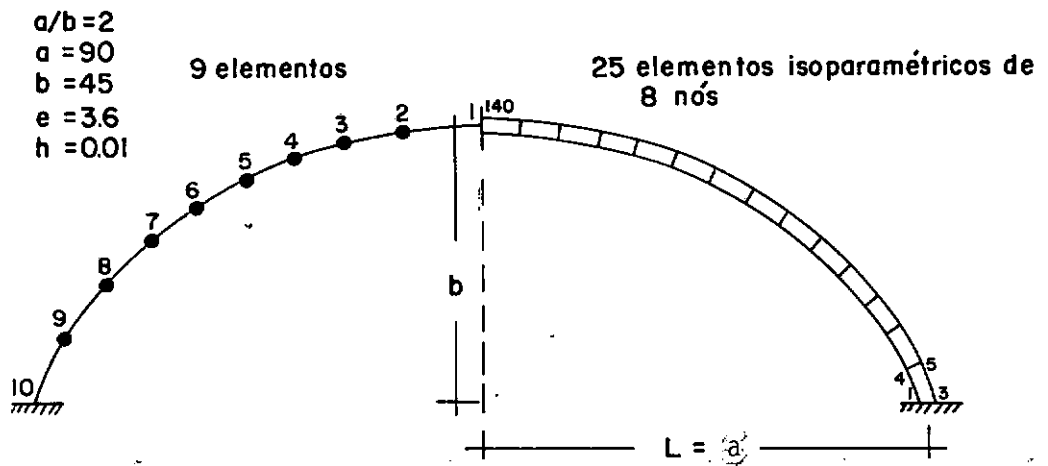


Fig. VI.19 - Casca elíptica - discretização análise limite e LORANE NL

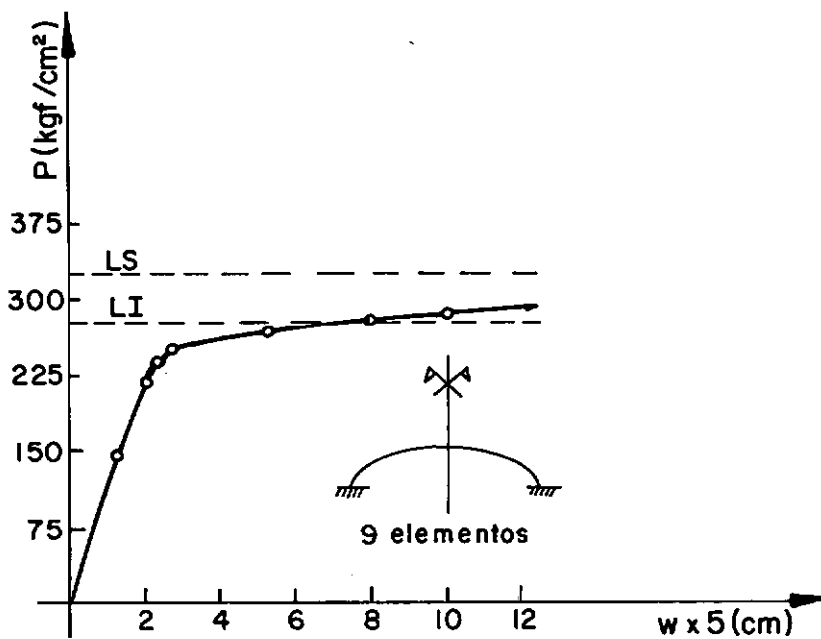


Fig. VI.20 - Casca elíptica - curva pressão x deslocamento

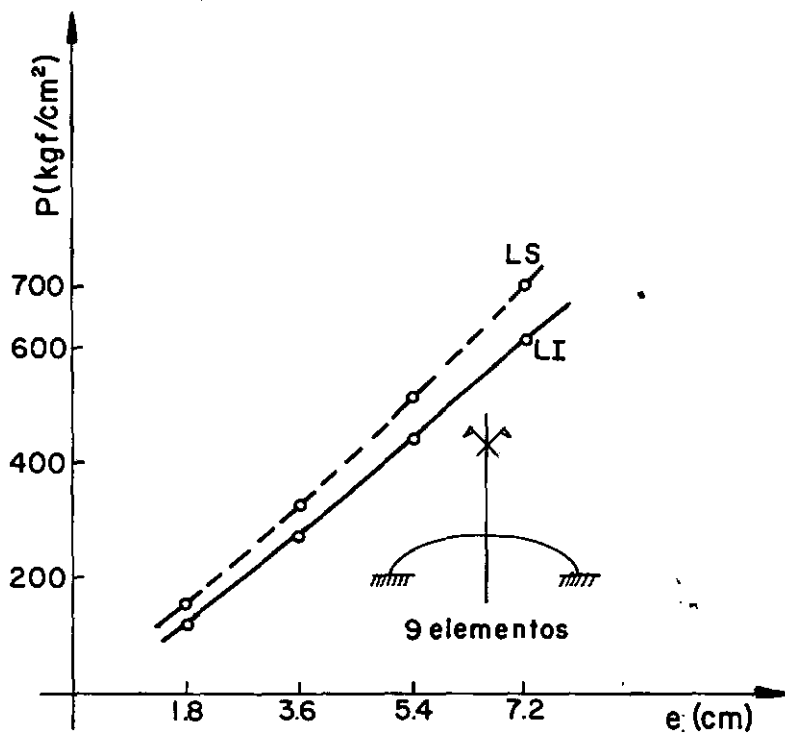


Fig. VI.21 - Casca elíptica - primeira discretização

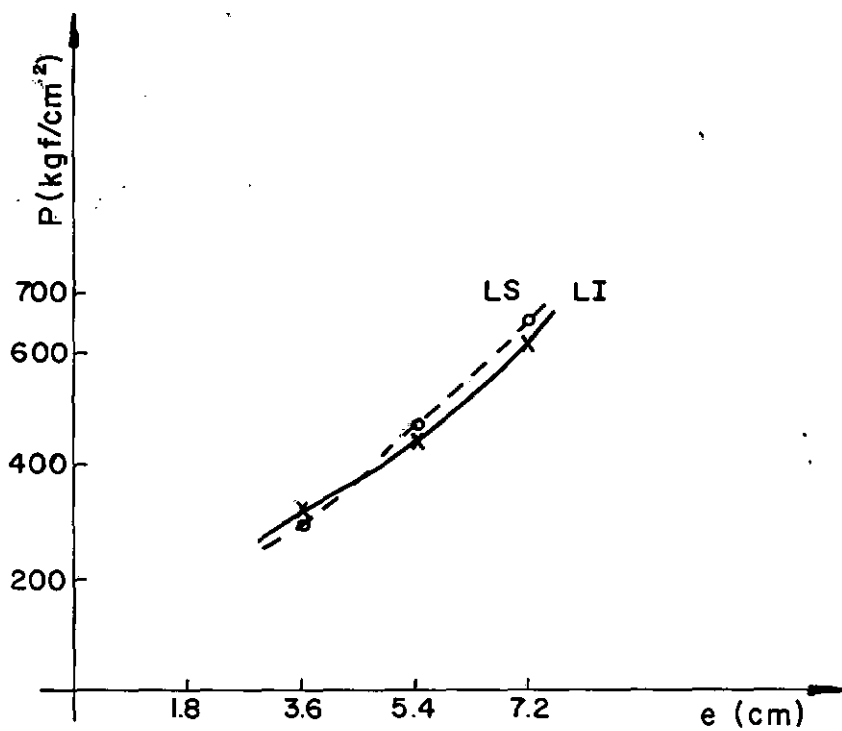


Fig. VI.22 - Casca elíptica - segunda discretização

VI.6. CASCA TORISFÉRICA

A análise limite da casca torisférica sofre influência do modo de discretização que tem importância fundamental nos resultados. Usando-se elementos aproximadamente iguais os resultados são deficientes, já para uma discretização muito concentrada na região de maior curvatura Figura (VI.23) os limites se distanciam para $h < 0.015$, o limite superior tende a ser maior e o limite inferior tende a ser menor. Obtiveram-se melhores resultados concentrando-se cinco dos nove elementos na região de maior curvatura, Figura (VI.24).

Tabela (VI.6). Comparação entre diferentes discretizações e outros resultados^{45,46,54} casca torisférica Figura (VI.23)

h	Limite (λ)		Referência ou discretização
	Superior	Inferior	
0.005	0.637	0.312	1ª disc.
	0.608	0.503	2ª disc.
	0.687	0.571	ref. 54
	0.627	0.627	Code ASME
	0.640	0.540	ref. 45
0.007	0.609	0.389	1ª disc.
	0.609	0.535	2ª disc.
	0.710	0.610	ref. 45
0.01	0.644	0.487	1ª disc.
	0.637	0.587	2ª disc.
	0.885	0.729	ref. 54
	0.626	0.626	code ASME
0.015	0.625	0.601	1ª disc.
	0.636	0.628	2ª disc.
0.02	0.652	0.675	1ª disc.
	0.697	0.673	2ª disc.
	0.625	0.625	Code ASME
	1.081	0.975	ref. 54

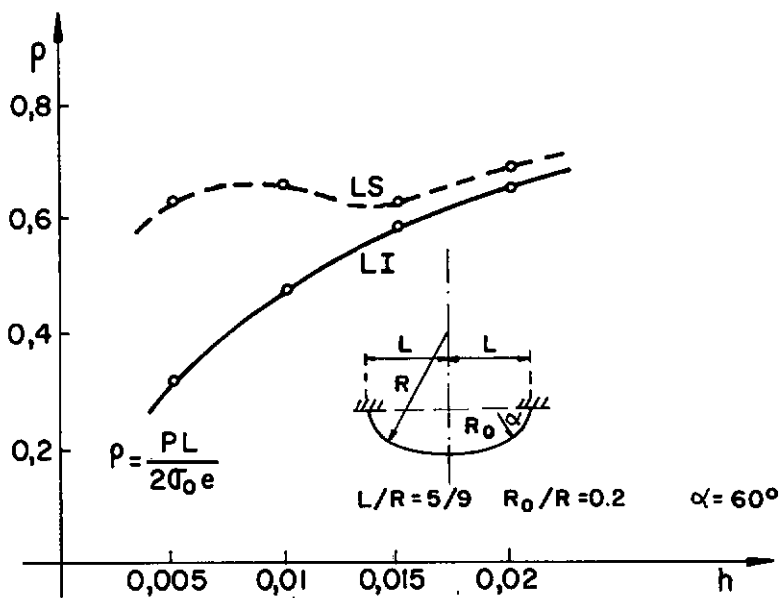


Fig. VI.23_Casca torisférica - primeira discretização

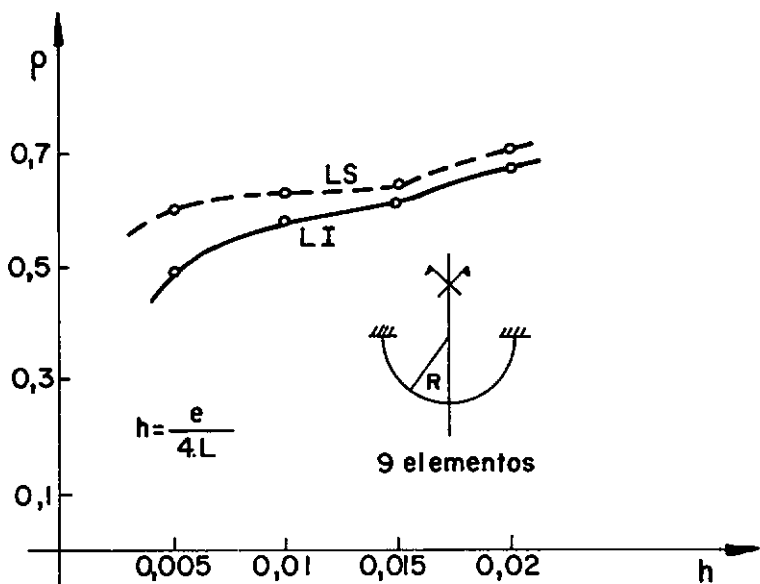


Fig. VI.24_Casca torisférica - segunda discretização

Com o objetivo de analisar os limites obtidos neste trabalho com outros resultados foi montada a Tabela (VI.6). A estimativa teórica de Shield e Drucker^{45, 46} é dado por:

$$\frac{\sigma_D}{\sigma_0} = (0.33 + 5.5 \frac{r}{D}) \frac{t}{L} + 28(1 - 2.2 \frac{r}{D}) (\frac{t}{L})^2 - 0.0006 \quad (VI.2)$$

Discutem-se os resultados de Nguyen Dang Hung⁵⁴ e os por ele citados do código ASME

$$2\rho_{ASME} = 1/2 \cdot (0.885 \frac{R}{L} + 0.4h) \quad (VI.3)$$

Os limites propostos por Shield e Drucker^{45, 46} aplicam-se a cascas finas. O código ASME⁵⁴ praticamente é o menos sensível a variação da espessura. Entretanto devido a semelhança entre a formulação apresentada neste trabalho e a de Nguyen Dang Hung⁵⁴ os resultados entre esses deveriam estar mais concordantes.

VI.7. VASO DE PRESSÃO (CILINDRO/ESFERA)

O vaso de pressão axissimétrico (cilindro/esfera) de parede fina analisado por Corneau^{4,8} apresentado na Figura (VI.25) tem diferentes espessuras e tensão limite de escoamento. A plastificação se dá para a pressão de 1180 psi no ponto de ligação das cascas. Para ilustrar o trabalho apresentam-se limites superiores considerando-se espessuras iguais, Figura (VI.26). O comportamento dos resultados é bastante aceitável do ponto de vista prático.

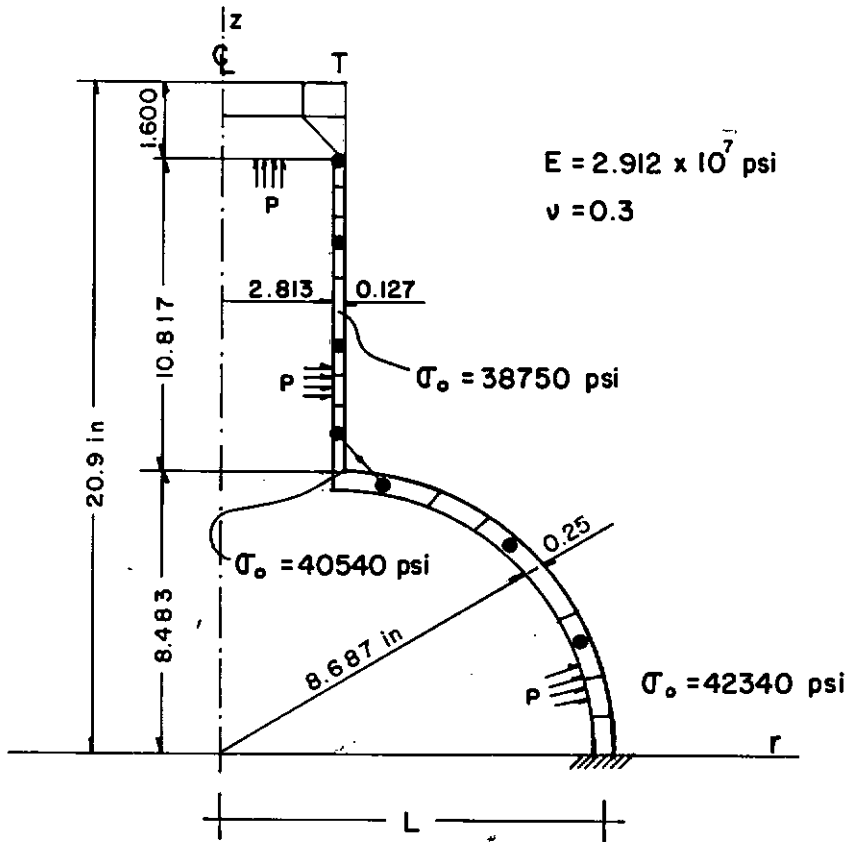


Fig. VI.25 - Vaso cilindro/esfera - geometria

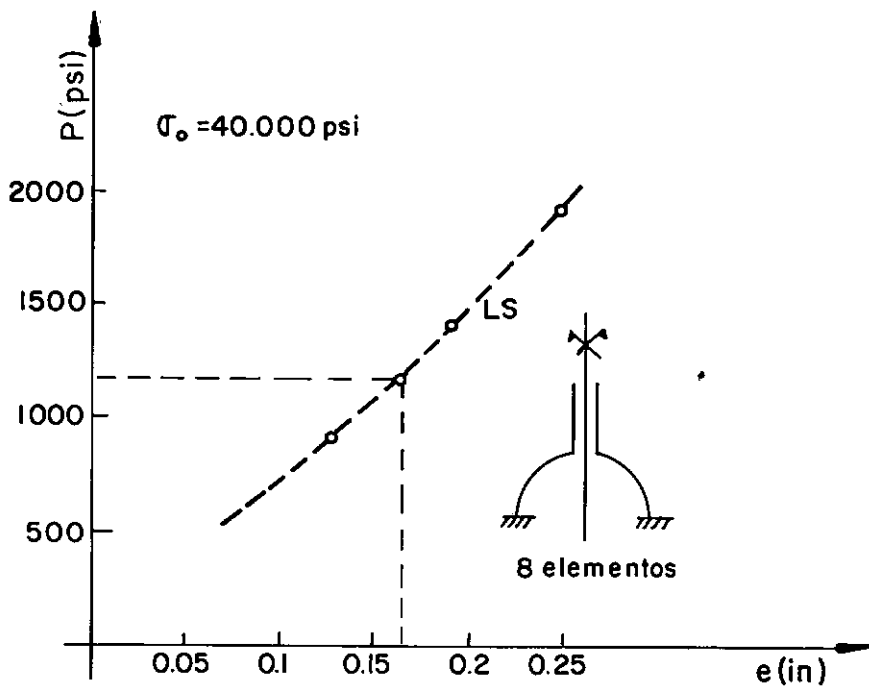


Fig. VI.26 - Vaso cilindro/esfera - limites para espessuras diferentes

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO

Os resultados apresentados indicam claramente que as formulações adotadas conduzem a aproximações satisfatórias para a solução de problemas práticos de engenharia.

A aproximação cinemática apresentou melhor performance do que a aproximação estática, na qual a condição de escoamento é relaxada sendo exigida apenas nos nós. Isto permite ao campo de tensões violar a condição de escoamento no interior dos elementos o que leva a considerar-se o limite inferior assim obtido como um limite "quase" inferior.

Pode-se alcançar melhores resultados implementando-se elementos curvos, representando melhor a geometria, por exemplo, ou ainda introduzindo-se algoritmos de aceleração na programação não-linear. Por outro lado, como os resultados da análise limite via programação não-linear e modelo de discretização simples obtidos neste trabalho foram satisfatórios, pode-se considerar estas formulações como uma ferramenta eficiente de verificação das condições de segurança de vasos e componentes axissimétricos.

Sugere-se portanto que a pesquisa seja conduzida no sentido de analisar novos problemas. Formulações para diferentes tipos de carregamento ou que levem em consideração algum tipo de descontinuidade na estrutura.

A análise limite de interseções tubulares e conexões de vasos é uma área que recentemente tem despertado forte interesse.

BIBLIOGRAFIA

1. BIRON, A. e HODGE JR., P.G. - Limit analysis of rotationally symmetric shells under central boss loadings by a numerical method, *J. Appl. Mech.* 34, 644-650, 1967.
2. BIRON, A. e HODGE JR., P.G. - Non-linear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells, *Int. J. Non-linear Mech.* 3, 201-213, 1968.
3. BIRON, A. e CHWALA, U.S. - Numerical method for limit analysis of rotationally symmetric shells, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 18, 109-117, 1970.
4. BIRON, A. e CHASLEUX, G., Limit analysis of axisymmetric pressure vessel intersection of arbitrary shape, *Int. J. Mech. Sci.* 14, 25-41, 1972.
5. HODGE JR., P.G. e BELYTSCHKO, T. - Numerical methods for the limit analysis of plates, *J. Appl. Mech.* 35, 797-802, 1968.
6. MAIER, G. - A quadratic programming approach for certain classes of non-linear structural problems, *Meccanica* 3, 121-130, 1968.
7. DONATO, O. e FRANCHI, A. - A modified gradient method for finite element elasto-plastic analysis by quadratic programming, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 2, 107-131, 1973.
8. HUNG, Nguyen Dang - Direct limit analysis via rigid-plastic finite elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 8, 81-

116, 1976.

9. ANDERHEGGEN, E. - Finite element analysis assuming rigid-ideal-plastic material behavior, *The Winter Annual Meeting of ASME*, New York, 1-18, 1976.
10. BIRON, A. - On results and limitations of lower bound limit analysis through nonlinear programming, *The Winter Annual Meeting of ASME*, New York, 19-34, 1976.
11. ZAVELANI-ROSSI, A.; PEANO, A. e BINDA, L. - Lower bounds to collapse pressure of axisymmetric vessels, *The Winter Annual Meeting of ASME*, New York, 53-66, 1976.
12. PEANO, A. - Limit analysis via stress functions, *The Winter Annual Meeting of ASME*, New York, 67-86, 1976.
13. COHN, M.Z. - Introduction to engineering plasticity by mathematical programming, *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Editado por M.Z. Cohn e G. Maier, Waterloo, Ontario, Canada, 3-18, 1977.
14. COHN, M.Z. e FRANCHI, A. - STRUPL: A computer system for structural plasticity, *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Editado por M.Z. Cohn e G. Maier, Waterloo, Ontario, Canada, 577-606, 1977.
15. HODGE JR., P.G. - *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice Hall, New York, 1963.
16. TIMOSHENKO, S. e KRIEGER, S.W. - *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 1959.
17. FISHER, L. - *Theory and practice of shell structures*, Berlim, Munique, 1968.

18. SAVE, M. - On yield conditions in generalized stresses,
Quartely of Applied Mathematics, vol. XIX, 3, 259-267,
1961.
19. SAVE, M.A. e MASSONET, C.E. - *Plastic analysis and design
of plates, shells and disks*, Amsterdam, London, 1972.
20. HODGE JR., P.G. - *Plastic analysis of structures*, McGraw-
Hill, New York, 1959.
21. HODGE JR., P.G. - Yield conditions for rotationally symmetric
shells under axisymmetric loading, *J. Appl. Mech.* 27,
323-331, 1960.
22. SANKARANARAYANAN, R. e OLSZAK, W. - The load carrying
capacities of plates and shells, *Non-Classical Shell
Problems*, Editado por W. Olszak e A. Sawczuk, North-
Holland, Amsterdam, 842-866, 1964.
23. HODGE JR., P.G. - The mises yield condition for rotationally
symmetric shells, *Quartely of Applied Mathematics*, vol.
XVIII, 4, 305-311, 1961.
24. HODGE JR., P.G. - The theory of rotationally symmetric
plastic shells, *Non-Classical Shell Problems*, Editado
por W. Olszak e A. Sawczuk, North-Holland, Amsterdam,
621-648, 1964.
25. FLÜGGE, W. - *Stresses in shells*, Springer, Berlin, 1960.
26. KACHANOV, L.M. - *Foundation of the theory of plasticity*,
North-Holland, 1971.
27. FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. - Displacement and equilibrium models
in the finite element methods, *Stress Analysis*, Editado
por O. Zienkiewicz, Wiley, New York, 145-197, 1965.

28. BATHE, Klaus-Jürgen e WILSON, E.L. - *Numerical methods in finite element analysis*, New Jersey, 1976, 528p.
29. DEL PIERO, Gianpietro - *Variational methods in limit analysis, Métodos Variacionais em Mecânica do Sólido*, Laboratório de Cálculo CBPF 3, 3-48, 1980.
30. GERE, J.M. e WEAVER JR., W. - *Matrix algebra for engineers* - New York, 1965.
31. FIACCO, A.V. e MCCORMICK, G.P. - *Nonlinear programming, sequential unconstrained minimization techniques*, Wiley, New York, 1968.
32. ZOUTENDIJK, G. - *Methods of feasible directions*, Elsevier, Amsterdam, 1960.
33. HIMMELBLAU, D.M. - *Applied nonlinear programming*, New York, 1972.
34. CONVERSE, A.O. - *Otimização*, Editora da Universidade de São Paulo, 1977.
35. BEST, M.J. - *Fundamentals of non-linear programming, Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Editado por M.Z. Cohn e G. Maier, Waterloo, Ontario, Canada, 1977.
36. BEST, M.J.; COHN, M.Z.; CONTRO, R.; CONADI, L. e SMITH, D. L. - *Non-linear programming applications, Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Editado por M. Z. Cohn e G. Maier, Waterloo, Ontario, Canada, 1977.
37. VALLIAPPAN, S. - *Continuum mechanics fundamentals*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1981.

38. ABADIE, J. e CARPENTIER, J. - Generalization de la méthode du gradient réduit de Wolfe au cas de contraintes nonlinéaires, Proc. IFORS Conf., Editado por R. Fletcher, cap. 4, *Optimization*, Academic Press Inc., London, 1969.
39. FACÓ, J.L. - Implantação do método do gradiente reduzido generalizado versão Abadie, Programa de Engenharia de Sistemas, COPPE/UFRJ, 1982.
40. FONSECA NETO, J.D.; EBECKEN, N.F.F. - Limite inferior da carga de colapso de vasos axissimétricos, VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, 1981.
41. FONSECA NETO, J.D.; EBECKEN, N.F.F. - Limites da carga de colapso de cascas e placas axissimétricos, II Simpósio Brasileiro de Tubulações, Salvador, 1982.
42. EBECKEN, N.F.F. - Lorane NL - Uma linguagem orientada a análise estrutural não-linear, PTS15-77, COPPE/UFRJ, 1977.
43. LANCE, R.H. e ONAT, E.T. - Analysis of plastic shallow conical shells, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 30, 199-209, 1963.
44. HODGE JR., P.G. e LAKSHMIKANTHAM, C. - Limit analysis of shallow shells of revolution, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 30, 215-218, 1963.
45. SHIELD, R.T. e DRUCKER, D.C. - Design of thin-walled torispherical and torsional pressure vessel heads, *J. Appl. Mech.* 28, 292-297, 1961.
46. DRUCKER, D.C. e SHIELD, R.T. - Limit analysis of symmetrical loaded thin shells of revolution, *J. Appl. Mech.* 26, 61-68, 1959.

47. LANDAU, L.; WROBEL, L.C.; EBECKEN, N.F.F. - Elastic-plastic analysis of shell structures, *Computers & Structures*, vol. 9, pp. 351-358, 1978.
48. CORMEAU, I.C. - Viscoplasticity and plasticity in the finite element method, *Ph.D. Thesis, University of Swansea*, March, 1976.
49. LANDAU, L. e EBECKEN, N.F.F. - Análise não-linear de estruturas e superfícies por meio de elementos finitos tridimensionais degenerados, *XVII Jornada Sul Americana de Engenharia Estrutural e V Simpósio Panamericano de Estruturas*, Caracas, Venezuela, 1975.
50. ISHIZAKI, T. e BATHE, K.J. - On finite element large displacement and elastic-plastic dynamic analysis of shell structures, *Computers & Structures*, vol. 12, 309-318, 1980.
51. HILL, R. - A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1, 18-28, 1948.
52. DRUCKER, D.C. - Some implications of work hardening and ideal plasticity, *Quart. Appl. Math.*, 7, 411-418, 1950.
53. FERRANTE, A.J.; LIMA, E.C.P. e EBECKEN, N. - Problem-oriented languages for finite element, *Advances in Engineering Software*, vol. 1, nº 2, 67-71, 1979.
54. HUNG, Nguyen Dang; TRAPLETTI, M. e RANSART, D. - Bornes quasi-inferieures et bornes superieures de la pression de ruine des coques de revolution par la méthode des elements finis et par la programmation non-lineaire, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 13, 79-102, 1978.

55. ZIENKIEWICZ, O.C. - *The finite element method*, London, 1977.

APÊNDICE A

PROVA DOS TEOREMAS DA ANÁLISE LIMITE²⁰

É conveniente primeiro desenvolver certas consequências das relações tensões-deformações. Pode ser mostrado que as constantes elásticas formam uma matriz simétrica positiva definida. Em outras palavras,

$$E_{21} = E_{12} \quad (\text{A.1})$$

e se x e y são números reais

$$E_{11}x^2 + 2E_{12}xy + E_{22}y^2 \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

com igualdade se e somente se $x=y=0$.

A lei de escoamento (potencial plástica) pode ser mostrada ser equivalente ao princípio do máximo trabalho plástico⁵¹. Para ver isso, assume-se o vetor velocidade de deformação \dot{q}^{11} como dado e considera-se o efeito da associação de vários vetores de tensões com ele. Consideram-se somente vetores de tensões os quais encontram-se dentro ou na curva de escoamento.

É evidente a partir de uma interpretação geométrica da função de dissipação que o verdadeiro vetor de tensões, isto é, o vetor a apontar onde o vetor velocidade de deformações é normal a curva de escoamento, representa o máximo valor da função de dissipação. Entretanto, se $\underline{\sigma}$ é o vetor de tensões real a ser associado com \dot{q}^{11} e $\underline{\sigma}^0$ é outro vetor de tensões qualquer o qual

encontra-se dentro ou na curva de escoamento,

$$\underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{q}}^{11} \geq \underline{\sigma}^0 \cdot \dot{\underline{q}}^{11} \quad (\text{A.3})$$

A equação (A.3) pode ser usada como um ponto de partida para a lei de escoamento plástico e a normalidade do vetor de velocidade de deformação derivada dela⁵².

Outra relação é a normalidade dos vetores de velocidade de tensões e velocidade de deformações plásticas. Como o vetor velocidade de deformações desaparece, exceto quando o ponto de tensão está na curva de escoamento, é necessário considerar somente esta situação. Existem três possibilidades para o vetor de velocidade de deformações. Ele pode permanecer estacionado, ele pode mover-se no interior da curva de escoamento, ou ele pode mover-se ao longo da curva de escoamento. No primeiro caso, $\dot{\underline{\sigma}}=0$, e, no segundo caso, $\dot{\underline{q}}^{11}=0$. Finalmente, se o ponto de tensão move-se ao longo da curva de escoamento, ele é obrigatoriamente perpendicular ao vetor velocidade de deformações o qual é normal a curva de escoamento. Esta afirmação é óbvia em um ponto de curvatura suave da curva de escoamento; isso pode ser mostrado ser válido também em um canto. Entretanto, em todos os casos possíveis a relação

$$\dot{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{q}}^{11} = 0 \quad (\text{A.4})$$

está assegurada.

Ainda que outro resultado geral seja uma analogia com o princípio dos trabalhos virtuais. Admitindo-se $\underline{\sigma}^0$ ser um vetor de tensões estaticamente admissível, e \underline{v}^* ser um vetor de velocidades cinematicamente admissível com velocidades de deformação $\dot{\underline{q}}^*$. Então, a taxa total de trabalho interno efetuada por $\underline{\sigma}^0$ em

$\dot{\underline{q}}^*$ é igual a taxa total de trabalho externo efetuado pelas ações de fronteira \underline{T}^0 nas velocidades \underline{v}^* . Logo,

$$\int_{Vol} \underline{\sigma}^0 \cdot \dot{\underline{q}}^* dVol = \int_S \underline{T}^0 \cdot \underline{v}^* dS \quad (A.5)$$

A prova é precisamente análoga aquela do princípio do trabalho virtual. Obviamente, uma afirmação similar pode ser feita sobre as velocidades de tensões:

$$\int_{Vol} \dot{\underline{\sigma}}^0 \cdot \dot{\underline{q}}^* dVol = \int_S \dot{\underline{T}}^0 \cdot \underline{v}^* dS \quad (A.6)$$

A seguir, mostra-se que, no instante do colapso sobre as cargas $\lambda \cdot \underline{T}$, a velocidade real de tensões $\dot{\underline{\sigma}}$ deixa de existir. Observe que esta afirmação é uma extensão considerável da definição do fator de segurança, o qual afirma somente que a superfície da taxa de ações de fronteira desaparece.

Esta definição fornece o ponto de partida da prova. Aplicando-se a equação (A.6) ao estado de colapso real, obtém-se

$$\int_{Vol} \dot{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{q}} dVol = \int_S \lambda \dot{\underline{T}} \cdot \underline{v} dS = 0 \quad (A.7)$$

Segue-se, de equações de velocidade de deformações total obtidas da forma diferenciada da Lei de Hooke²⁰:

$$\dot{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{q}} = \dot{\sigma}_1 (E_{11} \dot{\sigma}_1 + E_{12} \dot{\sigma}_2) + \dot{\sigma}_2 (E_{21} \dot{\sigma}_1 + E_{22} \dot{\sigma}_2) + \dot{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{q}}^{11} \quad (A.8)$$

De acordo com a equação (A.4), o último termo acima desaparece; em vistas da equação (A.2) os termos restantes são positivos exceto se

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

Como a equação (A.7) é obrigatoriamente válida, esta última consideração está assegurada.

Finalmente, segue-se de equações de velocidade de deformação total referidas anteriormente que:

$$\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^{11} \quad (\text{A.10})$$

A fim de provar o primeiro teorema da análise limite, considera-se a integral

$$\Delta = \int_{Vol} (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^0) \cdot \dot{\underline{q}} \, dVol \quad (\text{A.11})$$

onde $\underline{\sigma}$ é o estado real de tensões no colapso e $\underline{\sigma}^0$ um estado estaticamente admissível qualquer. De acordo com a equação (A.10), $\dot{\underline{q}}$ pode ser substituído por $\dot{\underline{q}}^{11}$, enquanto que conforme a eq. (A.3) $\Delta \geq 0$. Por outro lado, de acordo com a equação (A.5) tem-se:

$$\Delta = \int_{Vol} (\lambda \underline{I} - \lambda^- \underline{I}) \cdot \underline{V} \, dVol = (\lambda - \lambda^-) \int_{Vol} \underline{I} \cdot \underline{V} \, dVol \quad (\text{A.12})$$

Desta forma a última integral de (A.12) representa a taxa do trabalho externo e é obrigatoriamente positiva. Desde que Δ é positivo, obrigatoriamente tem-se $\lambda \geq \lambda^-$. Como λ é um multiplicador estaticamente admissível por definição, ele obrigatoriamente é o maior multiplicador.

Para o segundo teorema, considera-se a integral

$$\nabla = \int_{Vol} (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma}) \cdot \dot{\underline{q}}^* \, dVol \quad (\text{A.13})$$

Onde $\underline{\sigma}^*$ é um vetor de tensões associado com $\dot{\underline{q}}^*$ pela lei de escoamento plástico. Desde que este vetor maximize a função de dissipação, ∇ é não negativo.

Segue, através do princípio dos trabalhos virtuais

$$\int_{Vol} \underline{\sigma}^* \cdot \dot{\underline{q}}^* dVol = \int_S \lambda \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS \quad (A.14)$$

e da definição $\lambda^+ = D_{int}/D_{ext}$, equação (II.14)

$$\int_{Vol} \underline{\sigma}^* \cdot \dot{\underline{q}}^* dVol = \lambda^+ \int_S \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS \quad (A.15)$$

Logo,

$$\nabla = (\lambda^+ - \lambda) \int_S \underline{T} \cdot \underline{V}^* dS \geq 0 \quad (A.16)$$

Sabendo-se que o integrando é positivo por hipótese, $\lambda^+ \geq \lambda$. Finalmente, segue-se do princípio dos trabalhos virtuais que λ é um multiplicador cinematicamente admissível; então ele é o menor multiplicador.